



OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG

FAKULTÄT FÜR MASCHINENBAU

INSTITUT FÜR MECHANIK

Diplomarbeit

**Dreidimensionale Stabilitätsanalyse von Materialgleichungen zur
Beschreibung des Portevin-LeChatelier Effekts**

eingereicht im: Dezember 2003

von: Carina Brüggemann

geboren am 5. Februar 1979

in Stadtlohn

Ich versichere, daß ich diese Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Magdeburg, den 2. Mai 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Beschreibung des PLC-Effekts	5
3	Modellierung des PLC-Effekts	15
3.1	Eindimensionale Betrachtung des Zhang-McCormick-Estrin Modells	15
3.2	Das dreidimensionale Zhang-McCormick-Estrin Modell	18
3.3	Anfangsbedingungen und Parameter	21
4	Lineare Stabilitätsanalyse	23
4.1	Allgemein	23
4.2	Eindimensionale Stabilitätsanalyse	25
4.3	Dreidimensionale Stabilitätsanalyse	31
5	Numerische Ergebnisse der Stabilitätsanalyse	42
5.1	Lösung des Differentialgleichungssystem	42
5.2	Eindimensionale Analyse	43
5.3	Dreidimensionale Analyse	55

5.3.1	Allgemeine Erläuterung zur dreidimensionalen Betrachtung	55
5.3.2	Auswertung für reine Zug- und Druckbelastung	56
5.3.3	Walzbeanspruchung	56
5.3.4	Stabilitätskarten	69
6	Zusammenfassung und Ausblick	70

Kapitel 1

Einleitung

In der Industrie herrscht großes Interesse daran, Umformprozesse optimal auszulegen, um Nachbearbeitungskosten und Ausschussraten möglichst gering zu halten, sowie die Produktqualität zu steigern. In der Flugzeugbranche und in der Automobilindustrie interessieren oftmals Aluminiumlegierungen. Diese Legierungen verbinden eine geringe Dichte mit hoher Festigkeit, guter Zähigkeit und guter Dauerfestigkeit. Die Zugabe von Magnesium verbessert die Korrosionsbeständigkeit und die Festigkeit bei tiefen Temperaturen. Außerdem wird die Schweißbarkeit durch Zugabe von Magnesium verbessert. In der Automobil- und Luftfahrtbranche werden Aluminiumlegierungen häufig mit Al_2O_3 Partikeln versetzt.

Allerdings sind der Beanspruchung des Werkstoffes bei Umformprozessen Grenzen gesetzt. So tritt zum Beispiel bei Aluminium-, Kupfer-, Nickel- und Eisenlegierungen häufig der Portevin-LeChatelier Effekt - auch PLC-Effekt genannt - auf. Dieser ist eine spezielle Erscheinung der dynamischen Reckalterung (Estrin, 1987). Bei diesem Effekt ist das plastische Fließen Instabilitäten unterworfen. Dies führt in Zugversuchen in Abhängigkeit der Verformungsbedingungen zu gezähnten oder stufenförmigen Verformungskurven und zu Verformungsbändern, die auf der Probenoberfläche sichtbar werden. Dieser PLC-Effekt ist dehnraten- und temperaturabhängig. Die mikroskopischen Hintergründe des PLC-Effekts liegen bei dem Zusammenspiel zwischen mobilen bzw. beweglichen Versetzungen und den

unbeweglichen Waldversetzungen, sowie dem beständigen Anlagern und Ablösen von Fremdatomen. Dadurch entstehen Inhomogenitäten des plastischen Fließens.

Der PLC-Effekt hat schwerwiegende Folgen für die Werkstückqualität. Zum einen verliert der Werkstoff an Duktilität, zum anderen wird die Qualität der Oberfläche stark herabgesetzt und die Oberfläche besitzt nach der Verformung bei Auftreten des PLC-Effekts eine wesentlich erhöhte Welligkeit. Dadurch ist ein verhältnismäßig hoher Nachbearbeitungsaufwand nötig, um eine hohe Qualität des Endproduktes zu gewährleisten. Zusätzlich wird bei anschließend spanender Bearbeitung die Oberflächenqualität weiter herabgesetzt, da die Späne durch Auftreten des PLC-Effekts brüchig werden (Estrin, 1987). Daher gibt es im industriellen Bereich ein großes Interesse an einem quantitativen Verständnis des PLC-Effekts.

Historisch gesehen wird der PLC-Effekt schon weit vor der Betrachtung durch Portevin bzw. LeChatelier erwähnt (Franklin und Marder, 1995). Dulea dokumentierte 1813 Unstetigkeiten bei der plastischen Deformation von Metallen. Elf Jahre später 1824 schrieb Gerstner bei Zugversuchen von stählernen Pianoseiten, dass plötzliches Fließen auftrat. Die erste umfassende Beschreibung des PLC-Effekts stammt von Savart, der 1837 diskontinuierliche plastische Deformationen dokumentierte. Masson, sein Student, betrachtete 1841 das Problem, und wies die Abhängigkeit des PLC-Effekts von der Verformungsgeschwindigkeit und der Temperatur nach. Allerdings wird der Effekt des inhomogenen Fließens nach LeChatelier und Portevin benannt, die 1909 bzw. 1923 Untersuchungen zu diesem Effekt publizierten (Portevin und Le Chatelier, 1923).

Gliederung der Diplomarbeit. In dieser Arbeit wird die ein- und dreidimensionale Formulierung des Zhang-McCormick-Estrin Modells (Zhang et al., 2001) auf Stabilität untersucht, das eine Beschreibung des PLC-Effekts erlaubt. Das Modell wird im Folgenden abkürzend McCormick-Modell genannt werden. Zu Beginn dieser Arbeit wird auf die Grundlagen des PLC-Effekts eingegangen werden. Das darauf folgende Kapitel behandelt die lineare Stabilitätsanalyse elastoviskoplastischer Modelle, welche dann auf die ein- und dreidimensionale Formulierungen des McCormick-Modells angewandt wird. Anschließend werden im fünften Kapitel numerische Ergebnisse dokumentiert.

Kapitel 2

Beschreibung des PLC-Effekts

Der PLC-Effekt ist eine Instabilität im plastischen Fließen. Der plastische Verformungsprozess im Material tritt bei gleichförmiger Belastung nicht gleichförmig auf, sondern inhomogen in lokal begrenzten Verformungsbändern.

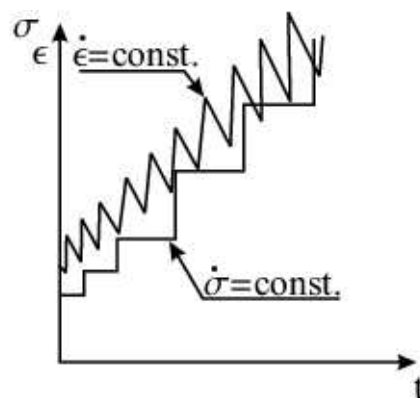


Abbildung 2.1: Gezackte bzw. gestufte Spannungsdehnungsdiagramme in Abhängigkeit der Versuchsbedingungen im Bereich des PLC-Effekts (Estrin, 1987)

Der PLC-Effekt führt abhängig von den Versuchsbedingungen bei dehnratengesteuerten Versuchen zu gezackten, bei belastungsgesteuerten Versuchen zu gestuften Spannungs-Dehnungskurven. Dies ist in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt.

Während des Verformungsvorgangs kann man Verformungsbänder- sogenannte

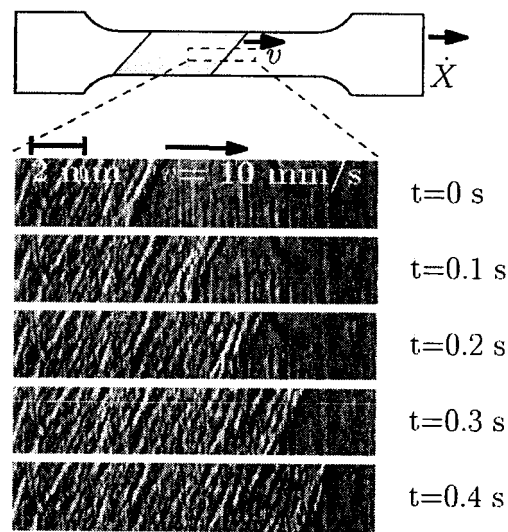


Abbildung 2.2: Während der Beanspruchung laufen Verformungsbänder durch das Material (Franklin et al., 2000)

PLC-Bänder- auf der Probenoberfläche beobachten (Bild 2.2). Abhängig von der Dehnrates wandern diese PLC-Bänder kontinuierlich, beginnend meist an der Einspannung, über die gesamte Messlänge oder entstehen zufällig über die gesamten Probenlänge verteilt.

Innerhalb des Dehnratenbereiches, in dem der PLC-Effekt auftritt, gibt es noch weitere Unterscheidungsmerkmale der Kurvenformen in Abhängigkeit der Dehnrates, wie in Abbildung 2.3 dargestellt.

Diese korrespondieren mit dem Auftreten der PLC-Bänder, welche bei verschiedenen Dehnrates zufällig über die Messlänge verteilt oder wie über die gesamte Länge laufende Bänder auftreten. Das erste PLC-Band könnte an jedem Ort der Probe entstehen, allerdings geschieht dies meist am Probenende, da dort durch die Einspannung Spannungskonzentrationen vorhanden sind.

Es gibt drei Hauptgruppen von Kurvenformen, sie werden mit Typ A,B und C benannt. Typ A repräsentiert die an einer Stelle am Werkstück auftretenden Scherbänder, welche sich kontinuierlich über die gesamte Probe fortpflanzen. Die Entstehung eines neuen Bandes spiegelt sich in der Kurvenform durch große

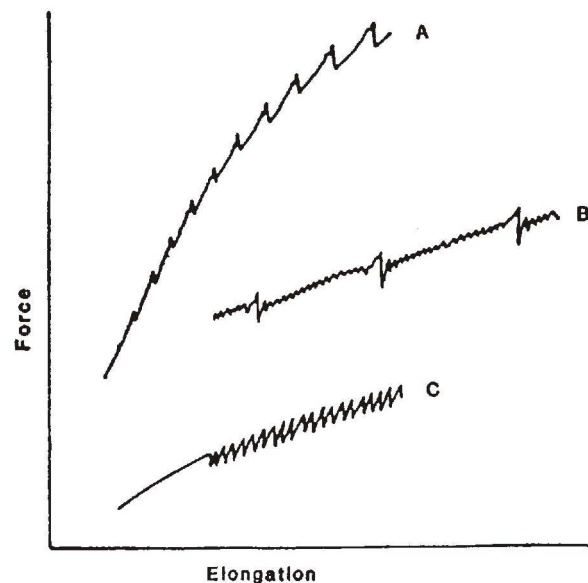


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der unterschiedlichen Kurvenformen Typ A, B und C im Spannungs-Dehnungsdiagramm bei dehnratengesteuerten Versuchen in Abhängigkeit der Dehnrates

Spannungsabfälle wieder. Während beim Typ A sich die Bänder kontinuierlich fortbewegen, treten die Bänder beim Typ B und C zufällig über die gesamte Werkstücklänge verteilt auf. Die einzelnen Kurvenformen gehen ineinander über, in der Reihenfolge von A über B nach C, sobald man entweder die Temperatur erhöht oder die Dehnrates verkleinert.

In Abbildung 2.4 ist die schematische Darstellung der verschiedenen Kurvenformen noch einmal mit realen Kurvenformen belegt.

Die statistische Auswertung der Spannungs-Dehnungskurven ist unter anderem in Artikeln von Lebyodkin et al. (1996), Lebyodkin et al. (2000) und Lebyodkin et al. (2001) beschrieben. Werden die Amplituden der Spannungsabfälle der Häufigkeit nach sortiert, entstehen in Abhängigkeit von der Dehnrates verschiedene Histogrammformen, wie in Abbildung 2.4 abgebildet.

Während sich die Verteilung bei kleinen Dehnrates, welche den Kurventyp C aufweisen, durch ein Maximum der Häufigkeit eines Bereiches der Spannungsabfälle

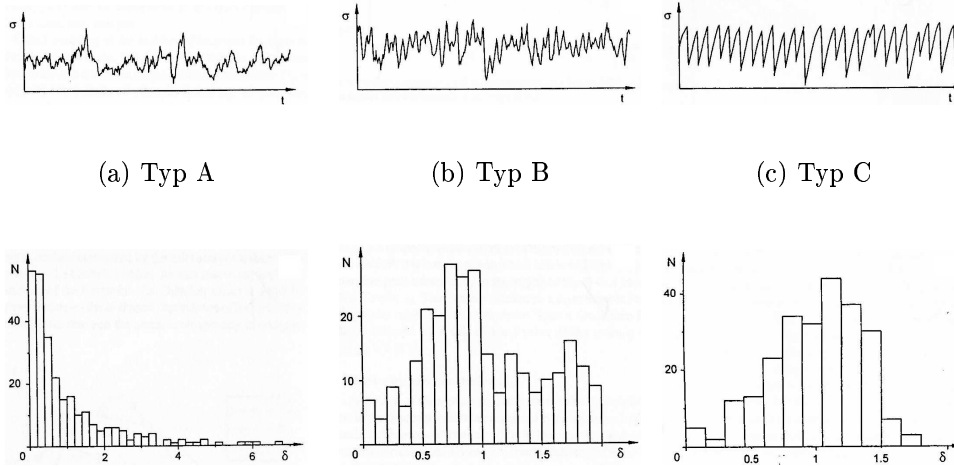


Abbildung 2.4: Verschiedene Kurvenformen im Spannungs-Dehnungsdiagramm bei dehnratengesteuerten Versuchen in Abhängigkeit von der Dehnrates ($C(\dot{\epsilon} = 2.7 \cdot 10^{-5} s^{-1})$, $B(\dot{\epsilon} = 1.1 \cdot 10^{-4} s^{-1})$, $A(\dot{\epsilon} = 5.3 \cdot 10^{-4} s^{-1})$) für AlMg bei Raumtemperatur (Lebyodkin et al., 2001)

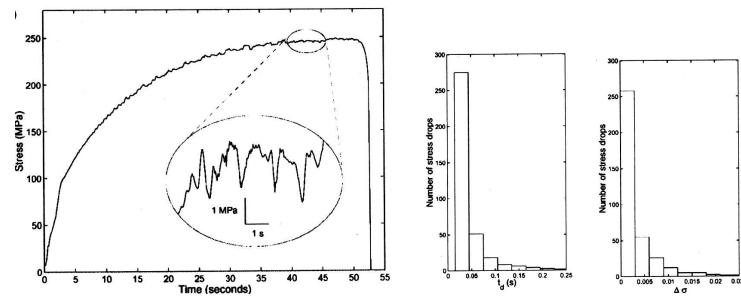
auszeichnet, sieht das Histogramm vom Kurventyp B gleichverteilter aus. Beim Kurventyp A bestimmen vor allem die Spannungsabfälle mit kleinen Amplituden das Aussehen des zugehörigen Histogramms.

Außerdem kann zur weiteren statistischen Auswertung die Verteilung der Dauer der Spannungsabfälle, wie in Abbildung 2.5 betrachtet werden (Kok et al., 2002). Dabei zeigt sich bei jedem Kurventyp A, B oder C allerdings nur, dass die Spannungsabfälle sprunghaft vonstatten gehen und nur kleine Zeitintervalle benötigen.

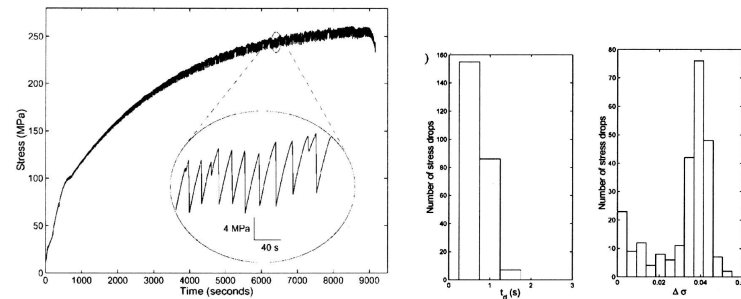
Desweiteren bringt die Auswertung der Zweipunkt-Korrelationsfunktion der Zeitfunktion $\sigma(t)$

$$S^*(\Delta t) = \frac{\langle \sigma(t)\sigma(t + \Delta t) \rangle - \langle \sigma(t) \rangle^2}{\langle \sigma(t)^2 \rangle - \langle \sigma(t) \rangle^2}, \quad (2.1)$$

wobei $\langle \sigma(t) \rangle$ den Mittelwert der Funktion $\sigma(t)$ bezeichnet, bei der Auswertung von PLC-Daten eine stark oszillierende Kurvenform wie in Abbildung 2.6 zu sehen.



(a) $\dot{\epsilon} = 5.6 \cdot 10^{-3} s^{-1}$



(d) $\dot{\epsilon} = 2.7 \cdot 10^{-5} s^{-1}$

Abbildung 2.5: Spannungs-Dehnungskurve und die dazugehörige statistische Auswertung der Spannungsabfallverteilung, sowie die Verteilung der Dauer der Spannungsabfälle (Kok et al., 2002)

Wenn eine Zeitfunktion ohne weitreichende zeitliche Korrelation ausgewertet wird, zeigt sich eine rasch auf Null abfallende Funktion $S^*(\Delta t)$. Fällt diese nicht ab, sondern oszilliert wie in der Auswertung des PLC-Effekts in Abbildung 2.1, zeigt sich, dass die Zeitfunktion $\sigma(t)$ aus überlagerten Frequenzen reproduziert werden kann.

Für die Einschätzung, ob bei den Versuchen eine bestimmte Gesetzmäßigkeit vorliegt, können die Histogramme der Verteilungen der Spannungsabfälle und die Auswertung der Zweipunkt-Korrelationsfunktion verwendet werden. Die Verteilung der Spannungsabfälle von den Versuchen mit kleinen Dehnraten zeigt eine Glockenkurvenform und die Auswertung der Zweipunkt-Korrelationsfunktion zeigt eine schnell abfallende Kurve, welches auf ein stochastisches Verhalten hin-

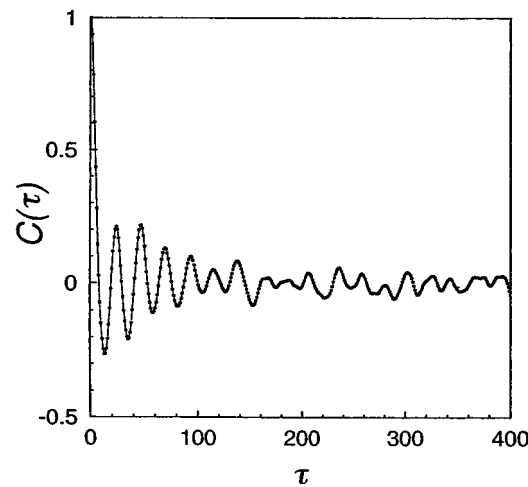


Abbildung 2.6: Beispiel für die Auswertung der Korrelationsfunktion einer Zeitfunktion, welche den Versuchsdaten eines PLC behafteten Zugversuches entnommen wurde

weist. Bei den Versuchen mit schneller Dehnrage hingegen hat die Korrelationsfunktion langsamer abfallende Funktionswerte, was darauf hinweist, dass die Funktion nicht mehr dem stochastischen Verhalten unterworfen ist. Und gehorcht die Verteilung der Spannungsabfälle dem Potenzgesetz, d.h. die doppelt logarithmische Darstellung der Verteilung der Spannungsabfälle zeigt lineares Verhalten, so deutet das auf Self-Organised-Criticality (SOC). Für den PLC-Effekt bedeutet das, dass an einer Stelle ein Scherband entsteht und sich kontinuierlich über die gesamte Messlänge bewegt. Eine genauere Erläuterung über die Bedeutung von SOC findet man in dem Artikel von Kubin et al. (2002).

Der PLC-Effekt zeichnet sich durch eine Temperaturabhängigkeit, wie in Abbildung 2.7 dargestellt, aus. Außerdem ist der PLC-Effekt von der Dehngeschwindigkeit abhängig, wie in Bild 2.8 zu sehen ist. Diese Temperatur- und Dehnratenabhängigkeit lässt sich an Bild 2.9 schematisch erkennen. Es existiert eine negative Geschwindigkeitsempfindlichkeit S der Fließspannung, d.h. die Fließspannung nimmt in beschränkten Bereichen von Temperatur und steigender Verformungsgeschwindigkeit ab (Estrin, 1987). Trägt man die Fließspannung wie in Bild 2.9 über der Dehngeschwindigkeit bei verschiedenen Temperaturen auf, so erkennt man, dass die Geschwindigkeitsempfindlichkeit S der Fließspannung nur in einem

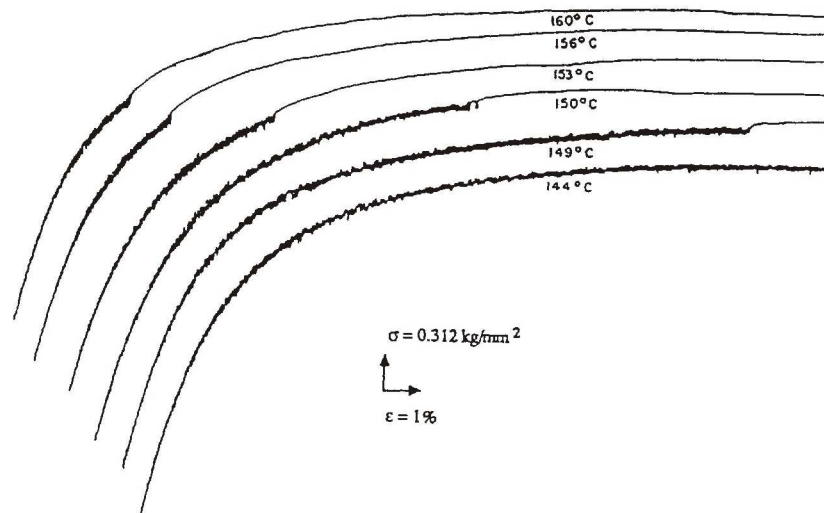


Abbildung 2.7: Temperaturabhängigkeit des PLC-Effekts

begrenztem Bereich von Dehngeschwindigkeit und Temperatur negativ wird, wobei gilt $T_0 < T_5$. Bei Temperaturen kleiner als T_0 und größer als T_5 findet eine herkömmliche plastische Verformung statt. In den Bereichen von $T_0 < T_3$ und $T_3 < T_5$ vermindert sich S und es tritt dynamische Reckalterung auf. Zwischen T_2 und T_4 wird S negativ und die dynamische Reckalterung dominiert den plastischen Verformungsvorgang, was zum auftreten des PLC-Effekts führt.

Außerdem verhält sich die kritische Dehnung bei der der PLC-Effekt auftritt wie in Bild 2.10. Die kritische Dehnung hängt von der Dehnrates aber auch von der Temperatur ab. Bei großen Dehnrates und geringen Temperaturen, steigt die kritische Dehnung mit wachsender Dehnrates und mit Verringerung der Temperatur. Dies wird als normales Verhalten bezeichnen. Im Bereich hoher Temperaturen und niedriger Dehnrates hingegen fällt die kritische Dehnung bei steigender Dehnrates und fallender Temperatur, dies wird inverses Verhalten genannt (Estrin und Kubin, 1996).

Die mikroskopische Ursache des PLC-Effekts, bzw. der negativen Geschwindigkeitsempfindlichkeit der Fließspannung, hängt mit den Versetzungsbewegungen zusammen. Bei den Versetzungen wird generell zwischen beweglichen (oder mobilen) und unbeweglichen (oder Wald-) Versetzungen unterschieden (Bross et al.,

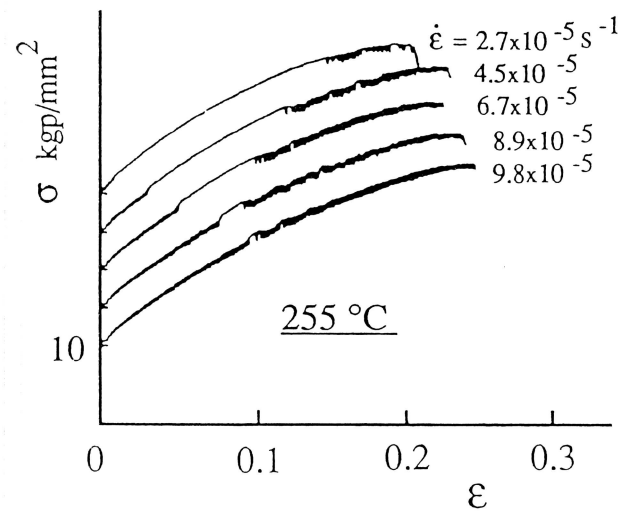


Abbildung 2.8: Dehngeschwindigkeitsabhängigkeit des PLC-Effekts

2003). Betrachtet man nun die Versetzungsbewegung in einem Einkristall, so bewegen sich die freien Versetzungen so lange, bis diese von Hindernissen z.B. den Waldversetzungen aufgehalten werden. In dieser Wartezeit in der die Versetzungen an den Hindernissen verharren, lagern sich Fremdatome an die Versetzungen an (sogenannte Cottrell-Wolken) wie in Abbildung 2.11, um ein niedrigeres Energieniveau zu erlangen und die Spannung, die zur Überwindung der Hindernisse benötigt wird, steigt an. Der PLC-Effekt entsteht durch plötzliches Loslösen der freien Versetzung von dem Hindernis und den angelagerten Fremdatomen und anschließendes Wiederholen dieses Vorganges.

Dieser Vorgang wird in Abbildung 2.12 verdeutlicht, in welcher nach dem Modell von Penning (Penning, 1972) aus dem Jahr 1972 die mikroskopischen Eigenschaften durch die Zusammensetzung der Fließspannung aus der Fließspannung des reinen Materials und einem Term $F(\dot{\epsilon})$, der die Wechselwirkung von Versetzungen mit Fremdatomen berücksichtigt, mit in das Modell integriert werden.

$$\sigma = \sigma_0 + F(\dot{\epsilon}). \quad (2.2)$$

In Abbildung 2.12 wird deutlich, dass in einem Dehnratenbereich zwischen $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_2$ kein stabiler Zustand entsteht. In dem Bereich niedriger Geschwindigkeiten

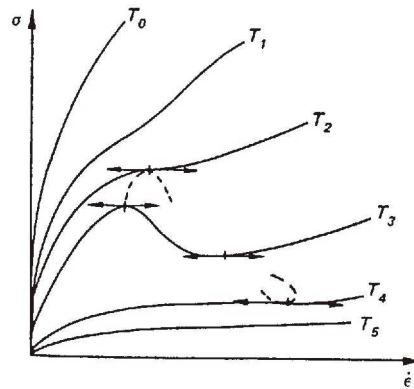


Abbildung 2.9: Fließspannung als Funktion der Dehngeschwindigkeit bei verschiedenen Temperaturen im Bereich des Portevin-LeChatelier Effekts

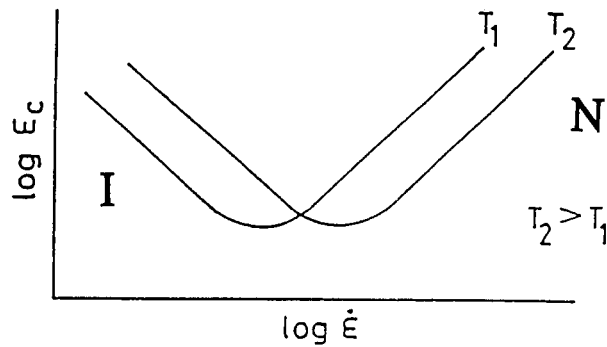


Abbildung 2.10: Normales und inverses Verhalten der kritischen Dehnung

(kleiner als $\dot{\epsilon}_1$) lagern sich Fremdatome an die Versetzung an. In dem Bereich hoher Geschwindigkeiten (größer als $\dot{\epsilon}_2$) bewegt sich die Versetzung ungehindert, da sie sich von den Fremdatomen losgelöst hat. Der Verformungszyklus lässt sich damit wie folgt beschreiben, die Dehnrage steigt bis zum kritischen Punkt A, springt auf Punkt C, fällt im stabilen Bereich auf den kritischen Punkt B zurück und springt dann auf den Punkt D, von wo aus der Zyklus erneut beginnt. Es lässt sich erkennen, dass eine Dehnrage $\dot{\epsilon}$ im Bereich $\dot{\epsilon}_1 < \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_2$ niemals stabil ist.

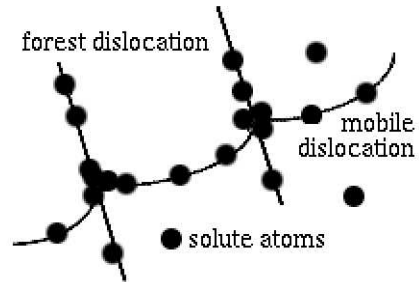


Abbildung 2.11: Interaktion zwischen Wald- und freien Versetzungen, sowie Fremdatomen (Bross et al., 2003)

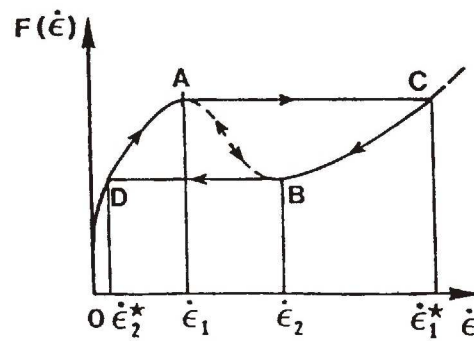


Abbildung 2.12: Verlauf des für den PLC-Effekt verantwortlichen Teils der Fließspannung $F(\dot{\epsilon})$

Kapitel 3

Modellierung des PLC-Effekts

3.1 Eindimensionale Betrachtung des Zhang-McCormick-Estrin Modells

Für den PLC-Effekt sind verschiedene Materialmodelle entworfen worden. Allerdings ist es bis heute noch nicht gelungen, aufgrund der mikroskopischen Hintergründe des PLC-Effekts, seine makroskopischen Eigenschaften vollständig zu beschreiben. Die bisher existierenden makroskopischen-Modelle haben dagegen keinen direkten Bezug zu der Mikrostruktur. Einen Teilansatz zur Mitberücksichtigung der mikroskopischen Eigenschaften des PLC-Effekts bietet das phänomenologische Modell von Zhang, McCormick und Estrin, hier wird dieses Modell im Folgenden kurz McCormick-Modell genannt (Zhang et al., 2001). Dieses Modell erlaubt eine elastisch-viskoplastische Beschreibung des PLC-Effekts.

Für die Beschreibung der Kinematik wird das Verschiebungsfeld $u(x, t)$, welches vom Ort x und von der Zeit t abhängt, mit dem Geschwindigkeitsfeld $v(x, t)$, wie folgt verknüpft

$$\dot{u}(x, t) = v(x, t). \quad (3.1)$$

Die Definition der Dehnung ε als Ortsableitung der Verschiebung lautet

$$\varepsilon = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet im Eindimensionalen

$$\ddot{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (3.3)$$

wobei ρ die Dichte und σ die Spannung ist.

Zur Vervollständigung des Differentialgleichungssystems für die Verschiebung $u(x, t)$ benötigt man noch Materialgleichungen. In der Elasto- Viskoplastizität kleiner Verformungen ist die grundlegende Annahme die der Zerlegung von der Verzerrung ε in einen elastischen ε_e und einen plastischen ε_p Anteil

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (3.4)$$

Das Hookesche Gesetz, welches die Spannung σ mit den elastischen Dehnungen ε_e über den Elastizitätsmodul E verknüpft, lautet

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p). \quad (3.5)$$

Die Fließregel für Zugversuche ist im McCormick-Modell wie folgt gegeben

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_o \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_d}{S} - P_1 C_s\right). \quad (3.6)$$

Hierbei beschreibt σ_d die Verfestigung des Materials infolge der plastischen Dehnung

$$\sigma_d = d_1 + d_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{d_3}\right)\right]. \quad (3.7)$$

Bei $\varepsilon_p = 0$ wird ersichtlich, dass d_1 die Fließgrenze des unverformten Materials darstellt.

S stellt die Dehnratenempfindlichkeit in Abhängigkeit der plastischen Dehnung dar

$$S = s_1 + s_2 \sqrt{\varepsilon_p}. \quad (3.8)$$

Die Gleichung 3.8 für die Dehnratenempfindlichkeit ist speziell für eine Al-Mg-Si Legierung experimentell bestimmt worden (Zhang et al., 2001).

Durch den Term C_s wird der PLC-Effekt in die Fließregel integriert. Dieser beschreibt die Veränderlichkeit der Konzentration der Fremdatome an den Versetzungen in Abhängigkeit von der plastischen Dehnung ε_p und der aging time t_a .

$$C_s = \left(1 - \exp\left[-P_2(\varepsilon_p)^\alpha (t_a)^n\right]\right) C_m \quad (3.9)$$

Je größer t_a ist, desto näher ist C_s dem Sättigungswert C_m . Im McCormick-Modell ist die aging time t_a , die Zeit die die Fremdatome zu den Hindernissen diffundieren. Die zeitliche Änderung der aging time wird durch

$$\dot{t}_a = 1 - \frac{t_a}{t_w} \quad (3.10)$$

modelliert. Die waiting time t_w ist die durchschnittliche Verweildauer der Fremdatome an den Hindernissen

$$t_w = \frac{\Omega}{\dot{\varepsilon}_p}, \quad (3.11)$$

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2(\varepsilon_p)^\beta. \quad (3.12)$$

Die Abhängigkeit von der Dehnung ist für Ω wiederum experimentell bestimmt worden.

Mit den obigen Gleichungen ist der PLC-Effekt eindimensional vollständig beschrieben. Das Materialmodell enthält die folgenden Materialparameter

$E, \nu, \dot{\varepsilon}_0, P_1, P_2, d_1, d_2, d_3, s_1, s_2, \omega_1, \omega_2, C_m, \alpha, \beta$ und n ab. Diese werden als konstant angenommen, wobei z.B. die Abhängigkeit von der Dehnrates bei $d_{1,2,3}$ vernachlässigt wird. Die Werte für diese Parameter sind in Tabelle 3.3 aufgeführt.

3.2 Das dreidimensionale Zhang-McCormick-Estrin Modell

Die Formulierung des dreidimensionalen Zhang-McCormick-Estrin Modell ist ganz analog zum eindimensionalen Modell aufgebaut. Das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ und das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sind folgendermaßen gekoppelt

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.13)$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\ddot{u} = \dot{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.14)$$

wobei ρ die Dichte ist und $\boldsymbol{\sigma}$ die Spannung ist.

Die Gesamtdehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T(\mathbf{u})) \quad (3.15)$$

wird in einen elastischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ und einen plastischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ zerlegt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (3.16)$$

Die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ ist durch das Hookesche Gesetz

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}_e] \\
&= \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

gegeben. Wobei der Steifigkeitstensor \mathbb{C} bei isotropen, linear elastischem Verhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &= \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \mathbb{I}^S \\
&= K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \mathbb{P}^{2I}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ist. λ und $G = \mu$ sind dabei die Laméschen Konstanten. G wird auch als Gleitmodul bezeichnet, K der Kompressionsmodul als $K = (3\lambda + 2G)/3$, \mathbf{I} der Ein-tensor 2. Stufe und $I_{ijkl}^S = 1/2(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl})$ der Symmetrisierer 4. Stufe. $\mathbb{P}^{2I} = \mathbb{I}^S - 1/3 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ ist ein Projektor, der jedem Tensor seinen Deviatoranteil zuordnet

Damit wird die Spannung in Kugel- und Deviatoranteile zerlegt

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}'_e, \tag{3.19}$$

Der plastische Dehnratentensor $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ wird durch die Prandtl-Reuss Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{3 \dot{\varepsilon}_{pv}}{2 \sigma_v} \boldsymbol{\sigma}' \tag{3.20}$$

bestimmt, wobei $\boldsymbol{\sigma}'$ der Spannungsdeviator ist und $\dot{\varepsilon}_{pv}$

$$\dot{\varepsilon}_{pv} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}, \quad (3.21)$$

sowie σ_v

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'} \quad (3.22)$$

die von-Mises Vergleichsgrößen sind.

Die Fließregel ist damit abhängig von der von-Mises Vergleichsdehnrate $\dot{\varepsilon}_{pv}$

$$\dot{\varepsilon}_{pv} = \dot{\varepsilon}_o \exp\left(\frac{\sigma_v - \sigma_d}{S} - P_1 C_s\right). \quad (3.23)$$

Die Größen $\sigma_d, S, C_s, t_a, t_w$ und Ω bleiben bis auf die Abhängigkeit von der Vergleichsgröße ε_{pv} , welche ε_p im 1D Fall ersetzt, mit der Definition im eindimensionalen McCormick-Modell identisch

$$\begin{aligned} \sigma_d &= d_1 + d_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_{pv}}{d_3}\right)\right], & t_a &= 1 - \frac{t_a}{t_w}, \\ S &= s_1 + s_2 \sqrt{\varepsilon_{pv}}, & t_w &= \frac{\Omega}{\dot{\varepsilon}_{pv}}, \\ C_s &= \left(1 - \exp\left[-P_2 (\varepsilon_{pv})^\alpha (t_a)^n\right]\right) C_m, & \Omega &= \omega_1 + \omega_2 (\varepsilon_{pv})^\beta. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im Falle von einem proportionalen Prozess mit $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \text{konst.}$, folgt bei einem isotropen Stoffgesetz, dass die Richtung des Spannungstensors identisch mit der Verformungsrichtung ist

$$\frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\|} = \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\|} = \mathbf{N} \quad (3.25)$$

Damit und

$$\int \dot{\epsilon}_p dt = \epsilon_p \quad (3.26)$$

lässt sich zeigen, dass

$$\begin{aligned} \int \dot{\epsilon}_{pv} dt &= \sqrt{\frac{2}{3}} \int \|\dot{\epsilon}_p\| dt, \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \|\epsilon_p\|, \\ &= \epsilon_{vp}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Somit kann $\dot{\epsilon}_{pv}$ aus ϵ_p berechnet werden, was nur beim proportionalen Prozess möglich ist.

Die Werte für die, für die dreidimensionale Beschreibung des PLC-Effektes, benötigten Parameter sind wiederum in Tabelle 3.3 abgebildet.

3.3 Anfangsbedingungen und Parameter

Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems benötigt man Anfangsbedingungen für $\epsilon_p(t = 0)$ (1D) bzw. im 3D Modell $\epsilon_p(t = 0)$ und $t_a(t = 0)$. Da wir vom unverformten und spannungsfreiem Material als Ausgangszustand ausgehen, kann die plastische Dehnung zu Beginn der Rechnung gleich Null gesetzt werden. Für die aging time wird ebenfalls die Annahme getroffen, dass diese zu Beginn der Deformation Null ist

Die für die Berechnung des McCormick-Modells sind diverse Parameter vonnöten. Diese sind aus dem Artikel von Zhang et al. (2001) entnommen und gelten für Al-Mg-Si Legierungen. Der Wert des Parameters C_m ist in diesem Artikel nicht

1D	$\varepsilon_p(t=0) = 0$	$t_a(t=0) = 0$
3D	$\varepsilon_p(t=0) = 0$	$t_a(t=0) = 0$

Tabelle 3.1: Anfangsbedingungen

Parameter	Wert	Parameter	Wert
P_1	18.0	n	1/3
$P_2(\text{s}^{1/3})$	3.91	$d_1(\text{MPa})$	38.03
α	0.44	$d_2(\text{MPa})$	29.94
β	0.68	d_3	$5.6 * 10^{-2}$
ω_1	$3.60 * 10^{-5}$	$E(\text{MPa})$	70000
ω_2	$2.16 * 10^{-3}$	ν	0.3
$s_1(\text{MPa})$	0.41	$\rho(\text{kg/m}^3)$	2650
$s_2(\text{MPa})$	2.91	$\dot{\varepsilon}_o(\text{s}^{-1})$	$2.30 * 10^{-7}$

Tabelle 3.2: Parameter für das McCormick Modell für eine Al-Mg-Si Legierungen

verzeichnet. Hier wird von der Annahme $C_m = 1$ ausgegangen, da C_m die Sättigungskonzentration von Fremdatomen an Versetzungen bedeutet, somit bedeutet $C_m = 1$ eine Sättigung von Fremdatomen von 100%. Außerdem tritt C_m nur als Produkt mit der Konstante P_1 auf.

Kapitel 4

Lineare Stabilitätsanalyse

4.1 Allgemein

Die meist verbreitete Methode linearer Stabilitätsanalyse ratenabhängiger Materialien basiert darauf, eine infinitesimale Störung auf das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathcal{A}(\mathbf{U}, t) \quad (4.1)$$

zu geben und die zeitliche Entwicklung dieser zu betrachten. Das Gleichungssystem enthält Gleichungen zur Kinematik, wie die Ableitung des Verschiebungsfeldes, die Gleichgewichtsbedingungen und Gleichungen zum Materialverhalten. Es wird davon ausgegangen, dass die Gleichgewichtslösung $U_0(\mathbf{x}, t)$ für das jeweilige Differentialgleichungssystem für jeden Zeitpunkt und Ort bekannt ist. Um die Stabilität des Systems zu überprüfen wird die Gleichgewichtslösung zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ des Deformationsprozesses mit einer Störfunktion $\bar{U}\phi$ überlagert und der weitere Verlauf der gestörten Gleichgewichtslösung $U_0 + \bar{U}\phi$ betrachtet. Die Störfunktion soll nur infinitesimal klein sein, sodaß um die Gleichgewichtslösung linearisiert werden kann. Und so nur das linearisierte System betrachtet wird. Die Störfunktion hat die Form

$$\phi = \exp(\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

wobei t die Zeit, \mathbf{x} der Ort, \mathbf{k} der Wellenvektor und $\omega = \omega_R + i\omega_I$ sich in Real- und Imaginärteil aufteilen läßt, wobei der Imaginärteil ω_I die Frequenz des harmonischen Anteils ist und ω_R die Anfachungsrate ist. Das System soll dann als stabil gelten, wenn alle Eigenwerte $\omega_R < 0$ negativ sind und somit die Störung abklingt. Ist $\omega_R = 0$ so ist das System metastabil. Und nur wenn $\omega_R > 0$ wird, wird die Störung angefacht und das System ist instabil.

Die Lineare Stabilitätsanalyse mit Hilfe von Störfunktionsansätzen ist in dem Artikel von Benallal (2000) beschrieben.

Zur Veranschaulichung wird hier die lineare Stabilitätsanalyse kurz am linear-elastischen Material durchgeführt. Das Differentialgleichungssystem setzt sich aus der Verschiebungs- Verzerrungsbedingung

$$\varepsilon = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (4.3)$$

der Impulsbilanz

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \rho \ddot{u}(x, t), \quad (4.4)$$

und der Materialgleichung

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.5)$$

zusammen.

Die Gleichgewichtslösung $\bar{u}(x, t)$ wird mit der Störfunktion überlagert

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \check{u}(x, t) = \bar{u}(x, t) + \hat{u}\phi(x, t), \quad (4.6)$$

wobei ϕ in Gleichung (4.2) definiert ist. Die Taylorreihenentwicklung der Spannung sieht wie folgt aus

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}) + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_L \varepsilon + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_L \dot{\varepsilon}, \quad (4.7)$$

wobei die Terme höherer Ordnung vernachlässigt wurden. Setzt man nun die Gleichgewichtsbedingung in die Gleichung (4.7) ein und beachtet

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_L = E, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\check{\phi} k^2, \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_L = 0, \quad \check{\rho} \dot{u} = \rho \hat{u} \phi \omega^2. \quad (4.9)$$

so erhält man nach einigen Umformungen

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho}. \quad (4.10)$$

Das heißt dann für die Stabilitätsanalyse, nur bei negativem E kann ein Eigenwert des Systems positiv werden. Bei positivem Elastizitätsmodul E verhält sich das System stabil. Nur im Falle eines positiv E-Moduls kann man überhaupt harmonische Lösungen erhalten. Bei einem negativen E-Modul wächst jede Störung über alle Grenzen.

4.2 Eindimensionale Stabilitätsanalyse

Wie auf den vorangehenden Seiten beschrieben, setzt sich nun das Differentialgleichungssystem für die eindimensionale Stabilitätsanalyse für das eindimensionale McCormick-Modell aus (3.1), (3.3), (3.6) und (3.10) zusammen

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= v, \\
\dot{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma(\varepsilon, \varepsilon_p)}{\partial x}, \\
\dot{\varepsilon}_p &= f(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a), \\
\dot{t}_a &= g(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

In diesen Gleichungen sind f, g die Evolutionsgleichungen für $\dot{\varepsilon}_p$ und \dot{t}_a

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a) &= \dot{\varepsilon}_o \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_d}{S} - P_1 C_s\right), \\
g(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a) &= 1 - \frac{t_a f(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a)}{\Omega(\varepsilon_p)}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Wenn nun $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\varepsilon}_p$ und \bar{t}_a die Gleichgewichtslösung bezeichnen, kann man zur Stabilitätsanalyse der Gleichgewichtslösung eine kleine Störung $\Delta u, \Delta v, \Delta \varepsilon$ und Δt_a überlagern,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \bar{u}(x, t) + \Delta u(x, t) = \bar{u} + \check{u}\phi(x, t), \\
v(x, t) &= \bar{v}(x, t) + \Delta v(x, t) = \bar{v} + \check{v}\phi(x, t), \\
\varepsilon_p(x, t) &= \bar{\varepsilon}_p(x, t) + \Delta \varepsilon_p(x, t) = \bar{\varepsilon}_p + \check{\varepsilon}_p\phi(x, t), \\
t_a &= \bar{t}_a(x, t) + \Delta t_a(x, t) = \bar{t}_a + \check{t}_a\phi(x, t),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Als Störansatz wird die Wellenfunktion

$$\phi(x, t) = \exp(\omega t + ikx) \quad (4.14)$$

genutzt. In der späteren Berechnung werden auch die hier aufgeführten Ableitungen der Wellenfunktion benötigt

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x, t) &= \omega \phi(x, t), \\ \ddot{\phi}(x, t) &= \omega^2 \phi(x, t), \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= ik \phi(x, t), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -k^2 \phi(x, t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

k ist hierbei die Wellenzahl und ω lässt sich in einen Realteil ω_R und einen Imaginärteil ω_I aufspalten. Damit beschreibt ω_I die Frequenz des harmonischen Anteils und ω_R die Anfachungsrate, dessen Vorzeichen über Stabilität oder Instabilität des Systems entscheidet. Wird $\omega_R > 0$ so wird die Störung angefacht und das System ist instabil. $\omega = 0$ bedeutet metastabil. Bleibt ω_R hingegen < 0 so wird die Störung gedämpft und das System gilt als stabil

$$\omega = \omega_R + i\omega_I. \quad (4.16)$$

Damit gilt für den Störansatz

$$\begin{aligned}
\phi(x, t) &= \exp(\omega_R t) \exp(i(\omega_I t + kx)), \\
&= \exp(\omega_R t) \exp(ik(ct + x)), \quad c = \frac{\omega_I}{k}, \\
&= \exp(\omega_R t) \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} i(ct + x)\right), \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \\
&= \exp(\omega_R t) \exp(i\phi),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

wobei c die Phasengeschwindigkeit der Welle, λ die Wellenlänge und ϕ der Phasenwinkel ist.

Auch die Spannung σ wird aufgeteilt in Gleichgewichtslösung $\bar{\sigma}$ und Störansatz $\Delta\sigma$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \Delta\sigma. \tag{4.18}$$

Um dieses Differentialgleichungssystem linearisieren zu können werden σ, g und f in eine Taylorreihe entwickelt

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p) + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\text{Lös}} [\Delta\varepsilon] + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta\varepsilon_p] + \dots \\
&= \sigma(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p) + E\Delta\varepsilon - E\Delta\varepsilon_p + \dots
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a) &= f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p, \bar{t}_a) + \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon] + \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon_p] + \left. \frac{\partial f}{\partial t_a} \right|_{\text{Lös}} [\Delta t_a] + \dots \\
g(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a) &= g(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p, \bar{t}_a) + \left. \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon] + \left. \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon_p] + \left. \frac{\partial g}{\partial t_a} \right|_{\text{Lös}} [\Delta t_a] + \dots
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

Bei einer Linearisierung werden die Terme höherer Ordnung vernachlässigt. Da bei der Stabilitätsanalyse nur das Verhalten des Störansatzes von Interesse ist, beschränken sich die folgenden Gleichungen immer auf diesen. Die Linearisierung für den Störansatz von $\Delta \sigma$ sieht dann wie folgt aus

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma &= \Delta \sigma(\varepsilon, \varepsilon_p) = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon] + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon_p], \\
&= E[\Delta \varepsilon] - E[\Delta \varepsilon_p].
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

Damit gilt für die linearisierten Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial x} = \frac{E}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \Delta \varepsilon_p}{\partial x} \right), \\
&= \frac{E}{\rho} \left(-k^2 \Delta u - ik \Delta \varepsilon_p \right),
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

wobei berücksichtigt wurde, dass

$$\Delta \varepsilon = ik \Delta u,
\tag{4.23}$$

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial x} = \tilde{u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k^2 \Delta u, \quad (4.24)$$

und

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_p}{\partial x} = \tilde{\varepsilon}_p \frac{\partial \phi}{\partial x} = ik \Delta u \quad (4.25)$$

gelten.

Die Linearisierungen Δf und Δg lauten

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\varepsilon}_p = \Delta f(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a) &= \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon] + \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon_p] + \left. \frac{\partial f}{\partial t_a} \right|_{\text{Lös}} [\Delta t_a], \\ &= F_0[\Delta \varepsilon] + F_1[\Delta \varepsilon_p] + F_2[\Delta t_a], \end{aligned} \quad (4.26)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta \dot{t}_a = \Delta g(\varepsilon, \varepsilon_p, t_a) &= \left. \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon] + \left. \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \varepsilon_p] + \left. \frac{\partial g}{\partial t_a} \right|_{\text{Lös}} [\Delta t_a], \\ &= G_0[\Delta \varepsilon] + G_1[\Delta \varepsilon_p] + G_2[\Delta t_a]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Unter Berücksichtigung der Störansätze gilt dann für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{u} &= \omega \Delta u = \Delta v, \\
\Delta \dot{v} &= \omega \Delta v = \frac{E}{\rho} \left(-k^2 \Delta u - ik \Delta \varepsilon_p \right), \\
\Delta \dot{\varepsilon}_p &= \omega \Delta \varepsilon_p = ik F_0 \Delta u + F_1 \Delta \varepsilon_p + F_2 \Delta t_a, \\
\Delta \dot{t}_a &= \omega \Delta t_a = ik G_0 \Delta u + G_1 \Delta \varepsilon_p + G_2 \Delta t_a.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Die endgültige Form des aus den Differentialgleichungen gewonnenen Eigenwertproblems nimmt nun diese Gestalt an

$$\begin{bmatrix} -\omega & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{\rho}k & -\omega & -\frac{iE}{\rho}k & 0 \\ ikF^0 & 0 & F^1 - \omega & F^2 \\ ikG^0 & 0 & G^1 & G^2 - \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \varepsilon_p \\ \Delta t_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

4.3 Dreidimensionale Stabilitätsanalyse

Die Stabilitätsanalyse des dreidimensionalen Problems ist ähnlich aufgebaut wie die des eindimensionalen Problems. Ausgehend vom Differentialgleichungssystem, welches sich aus (3.13), (3.14), (3.20) und (3.24) zusammensetzt

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}, \\
\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)), \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a), \\
\dot{t}_a &= g(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

In diesen Gleichungen sind $\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a)$, $g(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a)$ die Evolutionsgleichungen für $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ und \dot{t}_a

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a) = \frac{3f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a)}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_v}, \\
\dot{t}_a &= g(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a) = 1 - \frac{t_a f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a)}{\Omega(\boldsymbol{\varepsilon}_p)}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Auch im dreidimensionalen Fall wird das Differentialgleichungssystem in Gleichgewichtslösung $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ und \bar{t}_a , sowie Störansatz $\check{\mathbf{u}}\phi, \check{\mathbf{v}}\phi, \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\phi$ und $\check{t}_a\phi$ zerlegt

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}} + \check{\mathbf{u}}\phi(\mathbf{x}, t), \\
\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}} + \check{\mathbf{v}}\phi(\mathbf{x}, t), \\
\boldsymbol{\varepsilon}_p(\mathbf{x}, t) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\mathbf{x}, t) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\phi(\mathbf{x}, t), \\
t_a &= \bar{t}_a(\mathbf{x}, t) + \Delta t_a(\mathbf{x}, t) = \bar{t}_a + \check{t}_a\phi(\mathbf{x}, t).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Der Störansatz ist wie im eindimensionalen Fall eine Wellenfunktion ϕ , welche wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}, t) &= \exp(\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \\
\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) &= \omega \phi(\mathbf{x}, t), \\
\ddot{\phi}(\mathbf{x}, t) &= \omega^2 \phi(\mathbf{x}, t), \\
\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} &= i\phi(\mathbf{x}, t)\mathbf{k}, \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} &= -\phi(\mathbf{x}, t)\mathbf{k} \otimes \mathbf{k},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Die Bedeutung von ω_R ist gleichbedeutend mit der Bedeutung in der eindimensionalen Wellenfunktion

$$\omega = \omega_R + i\omega_I. \tag{4.34}$$

Die Wellenfunktion unterscheidet sich im Dreidimensionalen nur durch den Wellenvektor \mathbf{k} von der eindimensionalen Wellenzahl k , \mathbf{k} ist gegeben durch einen Richtungsvektor \mathbf{n} der durch Kugelkoordinaten parametrisiert werden kann

$$\begin{aligned}
n_1 &= \cos \phi \sin \theta, \\
n_2 &= \sin \phi \sin \theta, \\
n_3 &= \cos \theta,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

und einen Betrag

$$\mathbf{k} = \|\mathbf{k}\| \mathbf{n}. \tag{4.36}$$

Die Spannung wird ebenfalls in Gleichgewichtslösung $\text{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$ und Störansatz $\text{div}(\Delta\boldsymbol{\sigma})$ zerlegt

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \text{div}(\Delta\boldsymbol{\sigma}). \quad (4.37)$$

Die Divergenz der Störterme der Spannung werden wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} \text{div}(\Delta\boldsymbol{\sigma})_i &= \frac{\partial \Delta\sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} C_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^p), \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} C_{ijkl} \left(\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l} - \frac{\Delta\varepsilon_{kl}^p}{\partial x_j} \right), \\ &= C_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 \Delta u_k}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\Delta\varepsilon_{kl}^p}{\partial x_j} \right), \\ &= C_{ijkl} \left(-\phi \check{u}_k k_l k_j - i\phi k_j \check{\varepsilon}_{kl}^p \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

Betrachtet man den Akustiktensor

$$\begin{aligned}
A_{ik} &= \frac{1}{\rho} C_{ijkl} k_j k_l, \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G \delta_{ijkl} \right) k_j k_l, \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\lambda k_i k_k + 2G \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) k_j k_l \right), \\
\mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \left(\lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + G (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{I} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \right), \\
&= \frac{1}{\rho} \left(G \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{I} + (\lambda + G) \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right),
\end{aligned} \tag{4.39}$$

so ergibt sich für den Störterm der Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\Delta \boldsymbol{\sigma}) &= -\mathbf{A}(\mathbf{k}) \Delta \mathbf{u} - \frac{i}{\rho} \mathbf{C} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}'_p] \mathbf{k}, \\
&= -\mathbf{A}(\mathbf{k}) \Delta \mathbf{u} - \frac{i2G}{\rho} \mathbb{P}^{2I} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}'_p] \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Es werden \mathbf{f}, g wie im eindimensionalen Fall in eine Taylorreihe entwickelt, damit linearisiert werden kann. Für den Störansatz für $\Delta \mathbf{f}, \Delta g$ bedeutet dies

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= \Delta \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p] + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t_a} \right|_{\text{Lös}} [\Delta t_a] \\
&= \mathbb{F}_0 [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \mathbb{F}_1 [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p] + \mathbf{F}_2 [\Delta t_a]
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{t}_a &= \Delta g(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, t_a) = \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \right|_{\text{Lös}} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p] + \left. \frac{\partial g}{\partial t_a} \right|_{\text{Lös}} [\Delta t_a] \\
&= \mathbf{G}_0[\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \mathbf{G}_1[\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p] + G_2[\Delta t_a]
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Unter Beachtung des Störansatzes der Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{i}{2}(\Delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \Delta \mathbf{u}) \tag{4.43}$$

ergibt sich für das Differentialgleichungssystem der Störung in indizistischer Schreibweise

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{u}_i &= \omega \delta_{ik} \Delta u_k = \delta_{ik} \Delta v_k, \\
\Delta \dot{v}_i &= \omega \delta_{ik} \Delta v_k = -A_{ik} \Delta u_k - \frac{i2G}{\rho} P_{iokl}^{2I} k_o \Delta \varepsilon_{klp}, \\
\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \omega P_{ijkl}^{2I} \Delta \varepsilon_{kl}^p = \frac{i}{2}(F_{ijk_o}^0 \Delta u_k k_o + F_{ijok}^0 k_o \Delta u_k) + F_{ijkl}^1 \Delta \varepsilon_{kl}^p + F_{ij}^2 \Delta t_a, \\
\Delta \dot{t}_a &= \omega \Delta t_a = \frac{i}{2}(G_{k_o}^0 \Delta u_k k_o + G_{o_k}^0 k_o \Delta u_k) + G_{kl}^1 \Delta \varepsilon_{kl}^p + G^2 \Delta t_a.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Das Eigenwertproblem formuliert sich also wie folgt

$$\begin{bmatrix}
-\omega\delta_{ik} & \delta_{ik} & 0_{ikl} & 0_i \\
-A_{ik} & -\omega\delta_{ik} & -\frac{i2G}{\rho}P_{iokl}^{2I}k_o & 0_i \\
\frac{i}{2}(F_{ijk_o}^0 + F_{ijok}^0k_o) & 0_{ijk} & F_{ijkl}^1 - \omega P_{ijkl}^{2I} & F_{ij}^2 \\
\frac{i}{2}(G_{ko}^0k_o + G_{ok}^0k_o) & 0_k & G_{kl}^1 & G^2 - \omega
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta u_k \\
\Delta v_k \\
\Delta \varepsilon_{kl}^p \\
\Delta t_a
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}.
\tag{4.45}$$

Um das Gleichungssystem zu vereinfachen kann die Isotropie und die Eigenschaft der proportionalen Spannungsprozesse ausgenutzt werden. Geht man davon aus, dass \mathbf{N} die Richtung vom Spannungsdeviator ist

$$\mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}'} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\|\boldsymbol{\sigma}'\|},
\tag{4.46}$$

so stimmt unter der Voraussetzung der Isotropie und der Beschränkung auf proportionale Spannungsprozesse die Richtung von $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ und $\boldsymbol{\sigma}$ überein

$$\mathbf{N} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\|\boldsymbol{\sigma}'\|} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_p}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_p\|}.
\tag{4.47}$$

Für \mathbb{F}_0 ergibt sich mit diesem Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{3}{2\sigma_v} \boldsymbol{\sigma}' \otimes \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3f}{2\sigma_v^2} \boldsymbol{\sigma}' \otimes \frac{\partial \sigma_v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{3f}{2\sigma_v} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \\
&= 3G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_v} - \frac{f}{\sigma_v} \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + 3G \frac{f}{\sigma_v} \mathbb{P}^{2I}, \\
&= f_1 \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + f_0 \mathbb{P}^{2I},
\end{aligned}
\tag{4.48}$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{f}{\varepsilon} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \varepsilon} = 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_v} \mathbf{N}, \\ \frac{\sigma_v}{\varepsilon} &= 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N}, \\ \frac{\sigma'}{\varepsilon} &= 2G \mathbb{P}^{2I}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

\mathbb{F}_1 lässt sich wie folgt vereinfachen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_p} &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_v} \boldsymbol{\sigma}' \otimes \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} - \frac{3}{2} \frac{f}{\sigma_v^2} \boldsymbol{\sigma}' \otimes \frac{\partial \sigma_v}{\partial \varepsilon_p} + \frac{3}{2} \frac{f}{\sigma_v} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \varepsilon_p}, \\ &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pv}} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + 3G \left(-\frac{\partial f}{\partial \sigma_v} + \frac{f}{\sigma_v} \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} - 3G \frac{f}{\sigma_v} \mathbb{P}^{2I}, \\ &= (f_2 - f_1) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} - f_0 \mathbb{P}^{2I},\end{aligned}\tag{4.50}$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pv}} \frac{\partial \varepsilon_{pv}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pv}} - 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_v} \right) \mathbf{N},$$

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} = -2G \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N}, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} = -2G \mathbb{P}^{2I}.$$

Und desweiteren lassen sich \mathbf{F}_2

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t_a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial f}{\partial t_a} \mathbf{N}, \quad (4.52)$$

\mathbf{G}_0

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p},$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} 2G \frac{\partial g}{\partial \sigma_v} \mathbf{N}, \quad (4.53)$$

$$= f_4 \mathbf{N},$$

und \mathbf{G}_1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} &= \frac{\partial g}{\partial \sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{pv}} \frac{\partial \varepsilon_{pv}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}, \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{pv}} \mathbf{N} - \sqrt{\frac{3}{2}} 2G \frac{\partial g}{\partial \sigma_v} \mathbf{N}, \\
&= (f_5 - f_4) \mathbf{N},
\end{aligned} \tag{4.54}$$

umformen. Unter dieser Voraussetzung läßt sich das Gleichungssystem (4.45) wie folgt vereinfachen

$$\begin{bmatrix}
-\omega \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-\frac{1}{\rho} G \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{I} + (\lambda + G) \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} & -\omega \mathbf{I} & -\frac{i2G}{\rho} \mathbb{P}^{2I} \mathbf{k} & \mathbf{0} \\
i\mathbf{k}(f_1 \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + f_0 \mathbb{P}^{2I}) & \mathbf{0} & (f_2 - f_1) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} - f_0 \mathbb{P}^{2I} - \omega \mathbb{P}^{2I} & f_6 \mathbf{N} \\
i\mathbf{k} f_4 \mathbf{N} & \mathbf{0} & (f_5 - f_4) \mathbf{N} & f_3 - \omega
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta u_k \\
\Delta v_k \\
\Delta \varepsilon_{kl}^p \\
\Delta t_a
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}, \tag{4.55}$$

wobei f_0 bis f_6 die ermittelten Vorfaktoren sind

$$\begin{aligned}
f_0 &= 3G \frac{f}{\sigma_v}, & f_1 &= 3G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_v} - \frac{f}{\sigma_v} \right), \\
f_2 &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pv}}, & f_3 &= \frac{\partial g}{\partial t_a}, \\
f_4 &= 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_v}, & f_5 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{pv}}, \\
f_6 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial f}{\partial t_a}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse der Stabilitätsanalyse

5.1 Lösung des Differentialgleichungssystem

Die Stabilitätsanalyse im eindimensionalen sowie im dreidimensionalen Fall benötigt die Lösung des Differentialgleichungssystems für die plastische Dehnung ε_p bzw. 3D die plastische Vergleichsdehnung ε_{pv} und die aging time t_a . Diese Lösungen sind spannungs- bzw. dehnratenabhängig, so dass hier Lösungen für drei verschiedene Spannungsraten $\dot{\sigma}$ bzw. $\dot{\sigma}_v$ ausgewertet werden.

Die Abbildung 5.1 zeigt den typischen Verlauf der plastischen Dehnung bei spannungsgesteuerten Versuchen mit PLC-Effekt. Zu Beginn des Versuchs ist die plastische Dehnung Null, bis die Fließgrenze erreicht wird und sich die plastische Dehnung kontinuierlich erhöht. Ab einer gewissen, kritischen Dehnung, welche von den Versuchsbedingungen abhängig ist, beginnt die sprunghafte Änderung der Dehnung.

Bei feinerer Auflösung ist zu erkennen, dass je größer die Spannungsrate, desto größer ist die kritische Dehnung.

Es bleibt zu prüfen, ob sich dieser Trend für spannungsgesteuerte Versuche bestätigt oder ob sich im Versuch ein ähnlich inverser Effekt, wie bei dehnratengesteu-

Spannungsrate [MPa]	kritische Dehnung [%] (Größenordnung)
0.1	0.01
1	0.04
10	0.2
50	0.4
100	06

Tabelle 5.1: Kritische Dehnung in Abhängigkeit von der Spannungsrate

erten Versuchen (in Abbildung 2.10 dargestellt), ergeben. Sollte sich der inverse Effekt für die kritische Dehnung auch im spannungsgesteuerten Versuch zeigen, so müsste bei der Erstellung von Stabilitätskarten mit Hilfe des McCormick Modells eine gewisse Unschärfe im Bereich kleiner Spannungsraten berücksichtigt werden. Diese würde den instabilen Bereich vergrößern, da es zu einer früheren Dehnung bereits Instabilitäten anzeigen würde, als mit Berücksichtigung dieses Effekts.

Die aging time steigt, während das Material elastisch verformt wird, linear an, um an der Fließgrenze auf Null zu fallen. Bis zum Beginn der Instabilitäten bleibt die aging time null, ab diesem Zeitpunkt steigt die aging time an, um bei einem Sprung in der Dehnung wieder auf Null abzufallen.

5.2 Eindimensionale Analyse

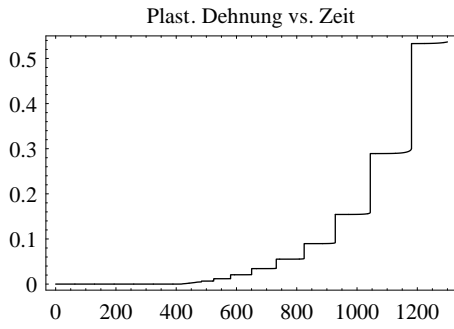
Das zu untersuchende Gleichungssystem ist abhängig von der Wellenzahl k , sowie der Spannungsrate $\dot{\sigma}$, alle anderen Parameter werden als konstant angenommen.

Zuerst wird das Stabilitätsverhalten des Systems bei einer Spannungsrate von $\dot{\sigma} = 0.1 \text{ MPa/s}$ betrachtet werden. Betrachtet man nun, den zeitlichen Verlauf der vier Eigenwerte des Systems (5.2), so erkennt man, dass die Realteile der ersten beiden Eigenwerte nie größer Null werden und nur der dritte und vierte berechnete Realteil der Eigenwerte im zeitlichen Verlauf, zumindest lokal positiv wird. Die Numerierung der Eigenwerte erfolgte willkürlich. Außerdem sind die Eigenwerte in Abhängigkeit der Wellenzahl k dargestellt. Hier ist zu erkennen, dass sich bei

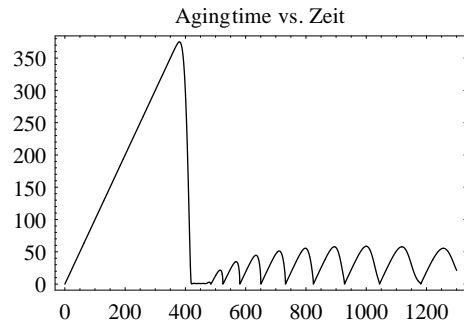
unterschiedlicher Wellenzahl, die Eigenwerte ziemlich gleichen. Allerdings gibt es in einem Bereich größere Abweichungen. In den folgenden Bildern zeigt sich, dass dieser Bereich die Zeitspanne zwischen Fließgrenze und erstmaligem Auftreten des PLC-Effektes ist.

In den Abbildungen 5.3, sowie 5.4 wird für diskrete Zeitschritte immer der maximale Realteil der vier verschiedenen Eigenwerte normiert auf eins abgebildet, da nur der größte Wert von Interesse ist. Dieser Maximalwert der realen Eigenwerte wird dann bei verschiedenen Wellenzahlen der plastischen Dehnung bzw. der aging time, für dieses Zeitintervall ebenfalls auf eins normiert, gegenübergestellt. Es lässt sich sehr deutlich erkennen, dass sich die Sprünge in der Dehnung in plötzlichen Sprüngen des Maximalwertes der Eigenwerte widerspiegeln. In diesen Abbildungen ist ebenfalls zu erkennen, dass der Bereich zwischen der Fließgrenze und der kritischen Dehnung, wo der PLC-Effekt das erste Mal in Erscheinung tritt, bei unterschiedlichen Wellenzahlen, die Kurvenformen für den maximalen Realteil des Eigenwertes variieren und nur bei kleinen Wellenzahlen die kritische Dehnung durch den ersten peak der positiven, reellen Eigenwerte.

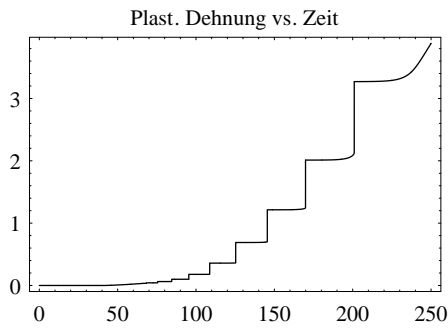
Für veränderte Spannungsraten, hier $\dot{\sigma} = 1\text{MPa/s}$ und $\dot{\sigma} = 10\text{MPa/s}$, erhält man dieselben Ergebnisse (Abbildung 5.5- 5.10). Einziger Unterschied ist die kritische Dehnung, bei welcher der PLC-Effekt auftritt.



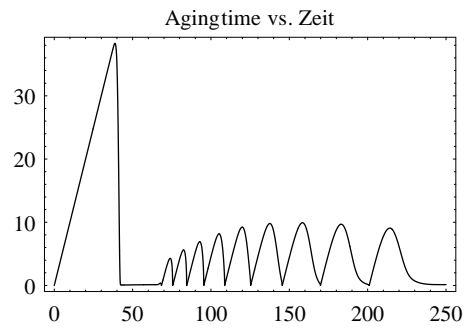
(a) $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$



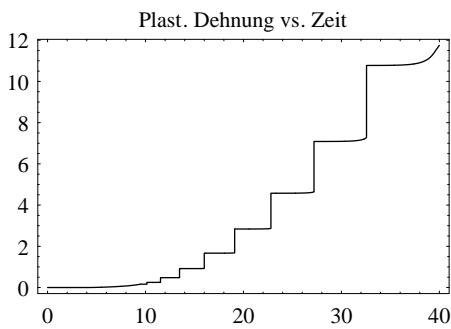
(b) $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$



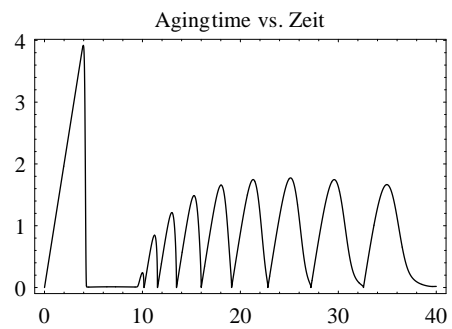
(c) $\dot{\sigma} = 1\text{MPa/s}$



(d) $\dot{\sigma} = 1\text{MPa/s}$

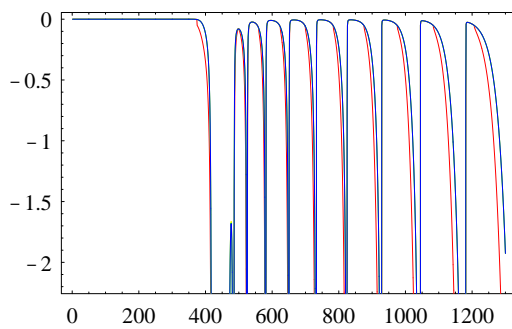


(e) $\dot{\sigma} = 10\text{MPa/s}$

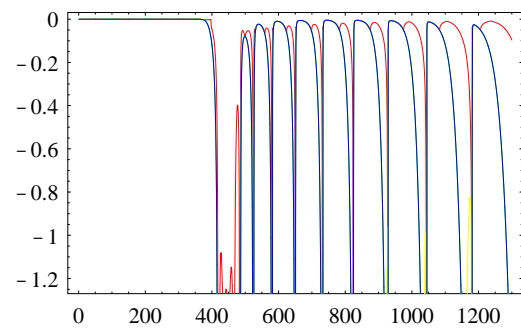


(f) $\dot{\sigma} = 10\text{MPa/s}$

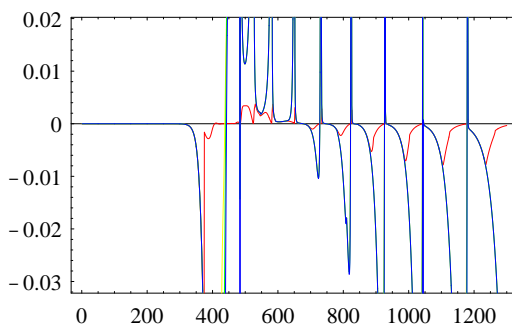
Abbildung 5.1: Plastische Dehnung und aging time über der Zeit $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$



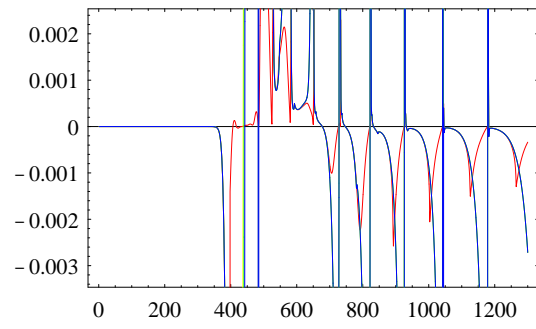
(a) 1. Eigenwert



(b) 2. Eigenwert



(c) 3. Eigenwert



(d) 4. Eigenwert

Abbildung 5.2: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$)

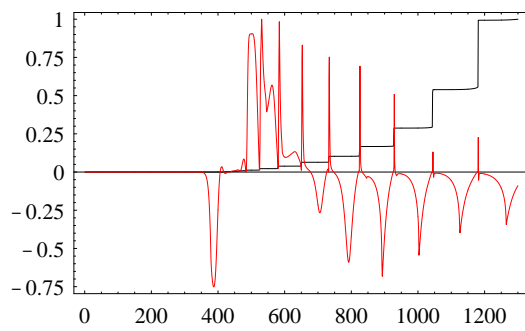
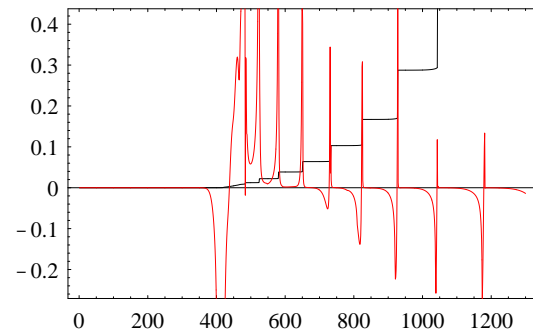
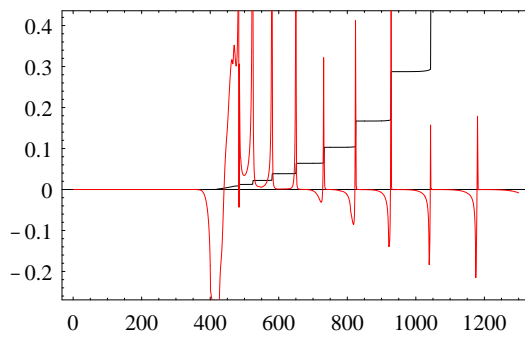
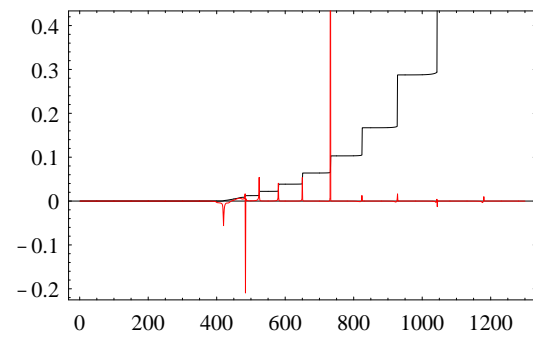
(a) $k=0.01$ (b) $k=0.5$ (c) $k=1$ (d) $k=100$

Abbildung 5.3: Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), plastische Dehnung (schwarz)

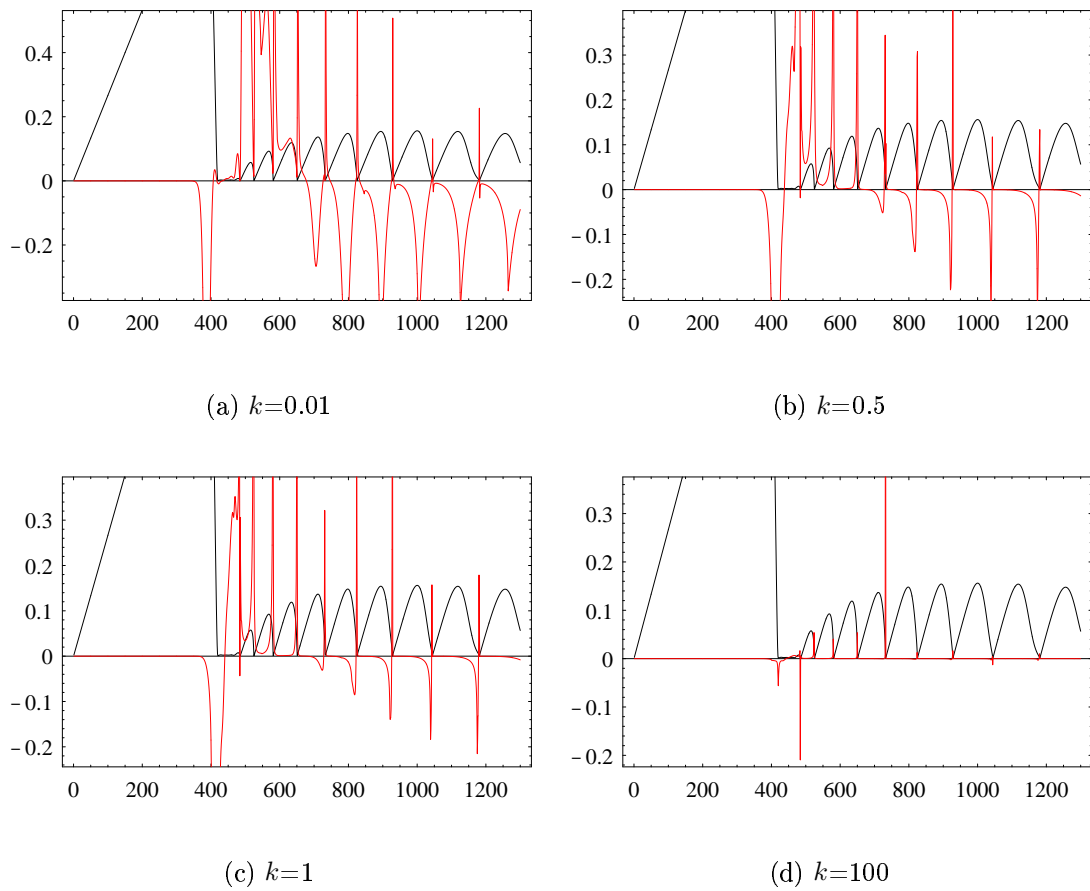
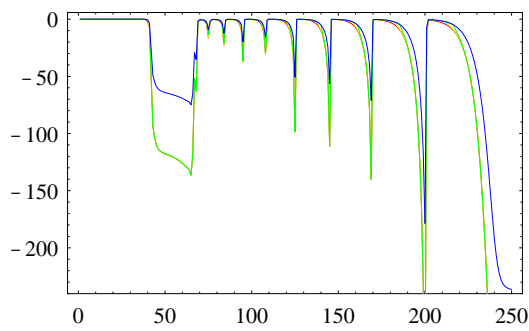
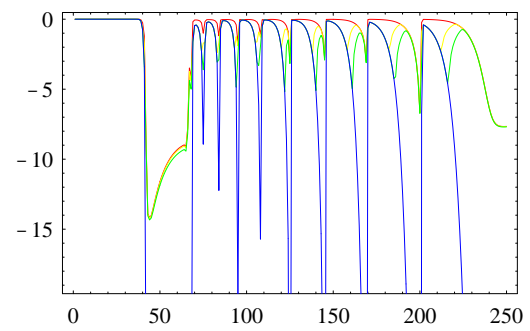


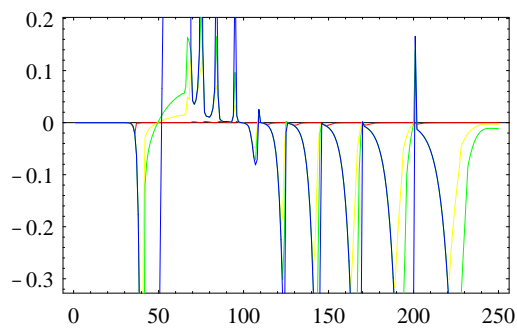
Abbildung 5.4: Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), aging time (schwarz)



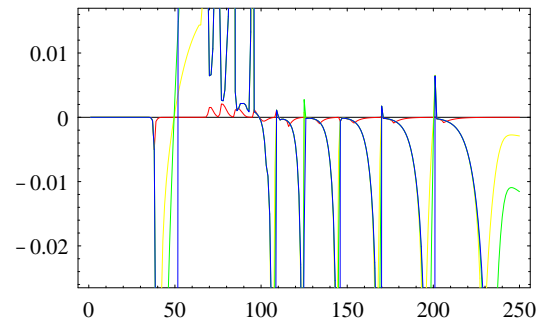
(a) 1. Eigenwert



(b) 2. Eigenwert



(c) 3. Eigenwert



(d) 4. Eigenwert

Abbildung 5.5: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$)

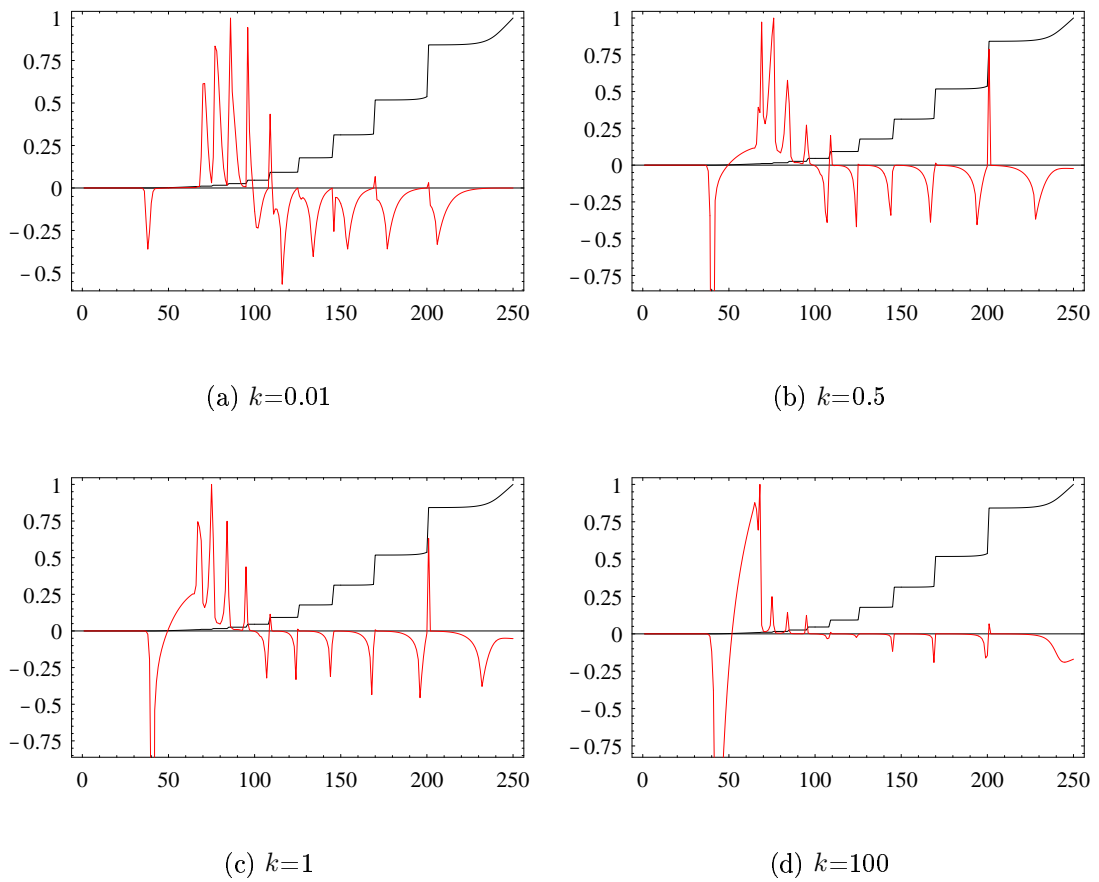


Abbildung 5.6: Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), Plastische Dehnung (schwarz)

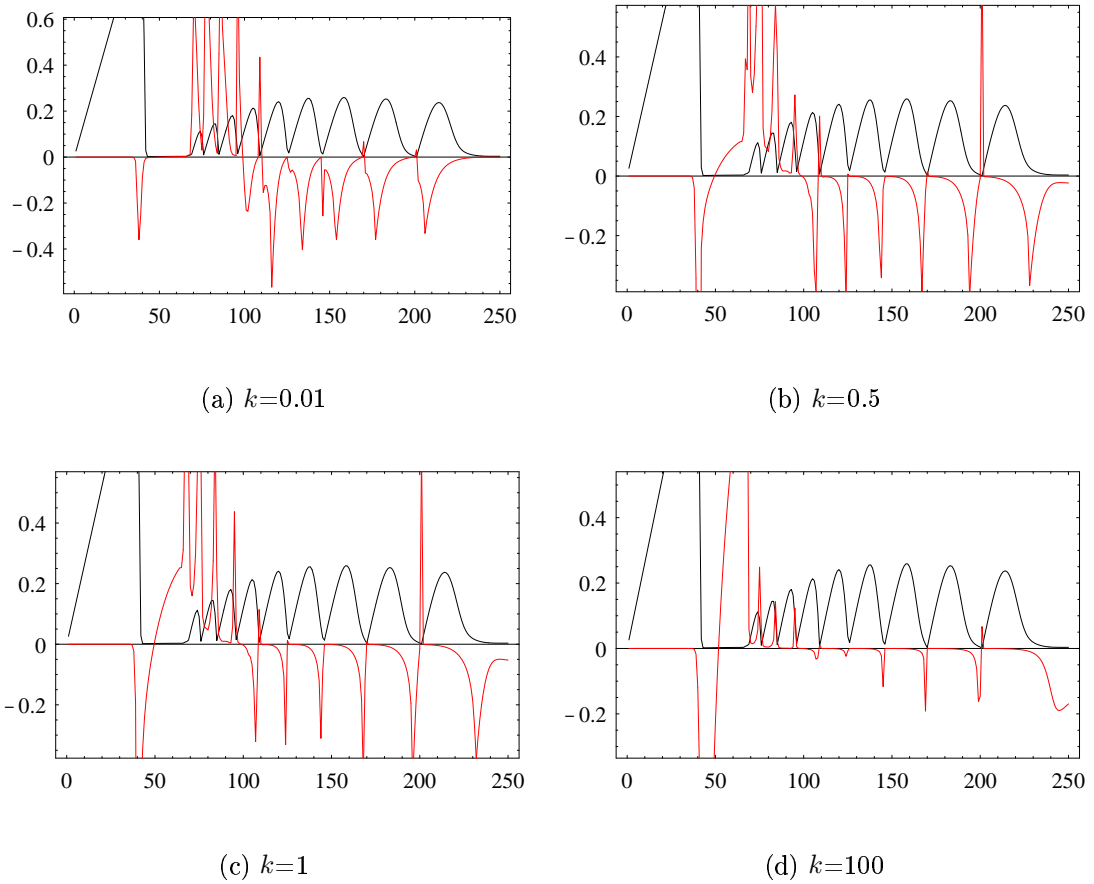
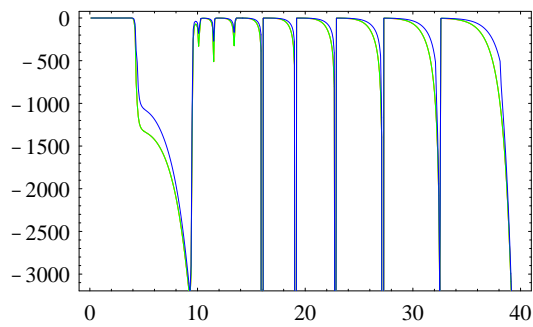
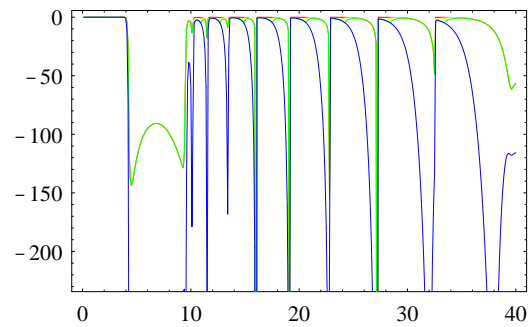


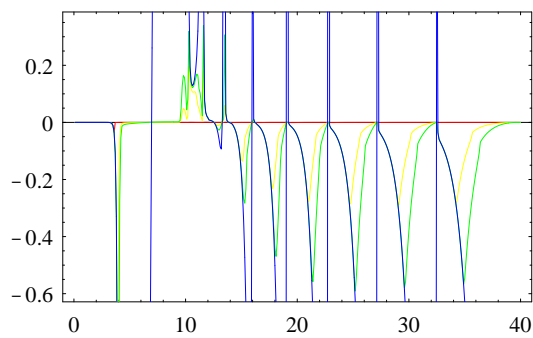
Abbildung 5.7: Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), aging time (schwarz)



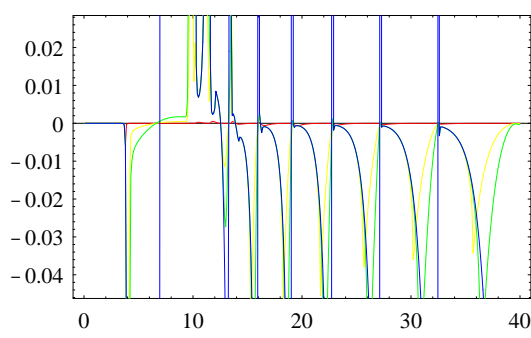
(a) 1. Eigenwert



(b) 2. Eigenwert



(c) 3. Eigenwert



(d) 4. Eigenwert

Abbildung 5.8: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$)

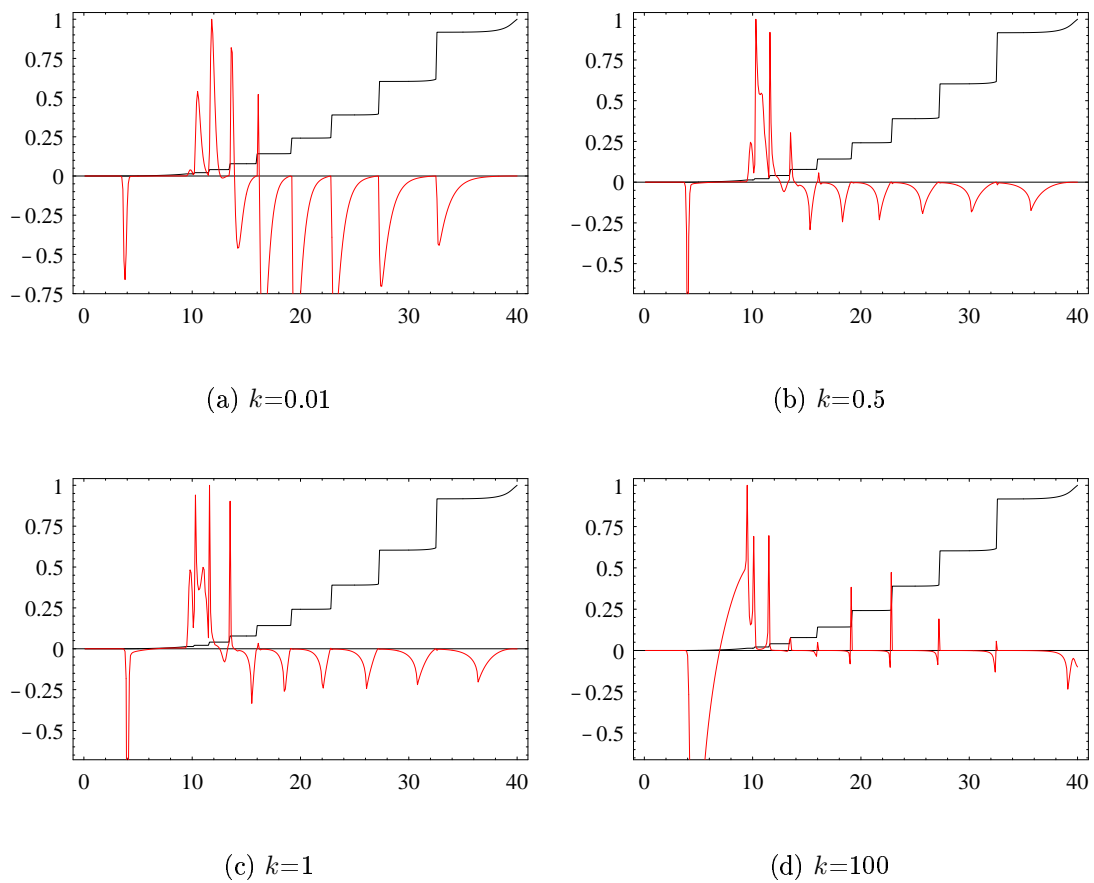


Abbildung 5.9: Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$)

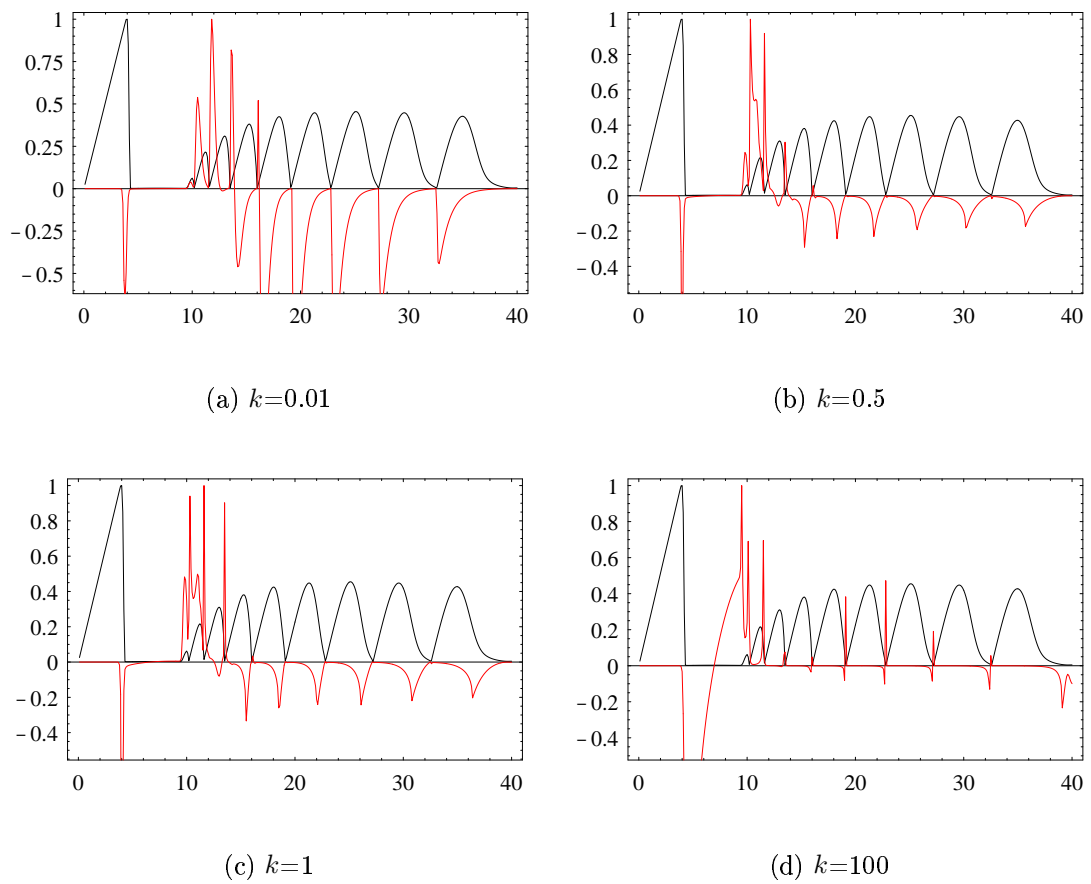


Abbildung 5.10: Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), aging time (schwarz)

5.3 Dreidimensionale Analyse

5.3.1 Allgemeine Erläuterung zur dreidimensionalen Betrachtung

Die Lösung des Differentialgleichungssystems für die Vergleichsdehnung ε_{pv} und die aging time, erfolgt analog zum eindimensionalen Problem. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung von proportionalen Spannungsprozessen von isotropen Materialien. Der Spannungsdeviator kann wie folgt aufgeteilt werden (Böhlke, 2000)

$$\boldsymbol{\sigma}' = \|\boldsymbol{\sigma}'\| \mathbf{N}, \quad (5.1)$$

wobei $\|\boldsymbol{\sigma}'\|$ der Betrag des Spannungsdeviators $\boldsymbol{\sigma}'$ und \mathbf{N} die Richtung des Spannungsdeviators ist. \mathbf{N} ist gegeben durch

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^3 n_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\alpha}. \quad (5.2)$$

Dabei sind n_{α} die Eigenwerte und \mathbf{e}_{α} die Eigenvektoren von $\boldsymbol{\sigma}' / \|\boldsymbol{\sigma}'\|$. Durch die Inkompressibilität und die Normierung ergeben sich die Nebenbedingungen $n_1 + n_2 + n_3 = 0$ und $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Diese lassen die folgende Parametrisierung des Spannungsdeviators zu

$$n_{1,3} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\xi \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\xi^2}, \quad n_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}\xi, \quad \xi \in [-0.5, +0.5]. \quad (5.3)$$

Für $\xi = -0.5$ bedeutet das einen einachsigen Zugversuch, für $\xi = 0$ einen Walzversuch und für $\xi = 0.5$ einachsiger Druck.

Das zu untersuchende Gleichungssystem ist abhängig von der Spannungsrate $\dot{\sigma}_v$, dem Betrag $\|\mathbf{k}\|$ und der Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} , welche durch Kugelkoordinaten mit Hilfe der Winkel $\phi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$ beschrieben werden kann. Alle anderen Parameter werden als konstant angenommen.

5.3.2 Auswertung für reine Zug- und Druckbelastung

Für reine Zug- bzw. Druckbelastung gilt für $\xi = -0.5$ bzw. $\xi = 0.5$. Betrachtet man die jeweiligen Richtungen der Belastungen, so zeigt sich, dass die Zugbelastung in \mathbf{e}_1 und die Druckbelastung in \mathbf{e}_3 Richtung geht. Transformiert man das System dahingehend, dass beide Beanspruchungen in \mathbf{e}_3 Richtung verlaufen, so lässt sich die Isotropiebedingung dahingehend zur Vereinfachung nutzen, dass die Eigenwertbetrachtung unabhängig von ϕ ist. ϕ wird zur weiteren Berechnung $\phi = 0$ gesetzt. In Abbildung 5.11 ist der maximale Realteil der Eigenwerte einer Zugbeanspruchung über der Zeit und dem Winkel ϑ aufgetragen. In den Abbildungen 5.11 ist ϑ in 36 Teile diskretisiert worden, also in 5 Grad Schritten. Es zeigt sich, dass positive, reelle Eigenwerte nur in $\vartheta = 0, \pi$ -Richtung auftreten, und zwar vollkommen identisch. Daher werden die folgenden Darstellungen sich immer auf das Winkelpaar $(0, 0)$ beziehen. Außerdem wird aus Abbildung 5.12 ersichtlich, dass die Ergebnisse für die Eigenwertanalyse vollkommen unabhängig von der Beanspruchungsart Zug oder Druck sind, sodass im folgenden nicht mehr zwischen Zug und Druck unterschieden wird. Außerdem ist auffällig, dass je größer $\|\mathbf{k}\|$, desto größer auch die maximalen, reellen Eigenwerte (Abb.5.12).

Bei der Betrachtung der auf Eins normierten Eigenwerte in Bezug zu der ebenfalls auf Eins normierte plastischen Vergleichsdehnung ε_{pv} bzw. der aging time t_a lässt sich wiederum erkennen, dass die Sprünge in den positiven Eigenwerten mit dem Verlauf der Sprünge der plastischen Vergleichsdehnung bzw. der aging time bei sehr kleinen $\|\mathbf{k}\|$ übereinstimmen. Dieser Effekt wird bei größer werdenden $\|\mathbf{k}\|$ ungenauer.

5.3.3 Walzbeanspruchung

Für die lineare Stabilitätsanalyse bei einer Walzbeanspruchung ergibt sich eine Abhängigkeit von ϕ . Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ gibt es positive, reelle Eigenwerte. Der zeitliche Verlauf der Eigenwerte von $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist aber identisch, sodass hier wieder repräsentativ nur für $\phi = 0$ die weitere Stabilitätsanalyse durchgeführt wird. Stellt man nun wieder die positiven, reellen Eigenwerte in Abhängigkeit von

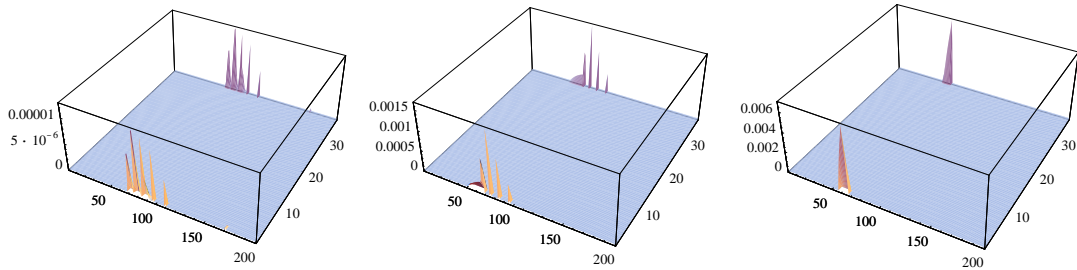
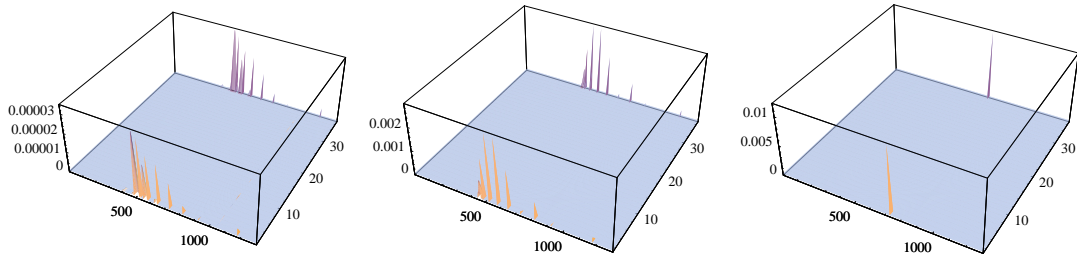
(a) $k = 0.001$ (b) $k = 0.1$ (c) $k = 1$ (d) $k = 0.001$ (e) $k = 0.1$ (f) $k = 1$

Abbildung 5.11: Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t und über ϑ dargestellt, $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ (oben) bzw. $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ (unten) (Für ϑ gilt die Teilung $\pi/36$)

der Zeit t und dem Winkel ϑ dar, wie in Abbildung 5.17, und beachtet wiederum die Teilung von $\vartheta = n * \pi/36$, so kann man erkennen, dass nur für $n = 9$ und $n = 27$, also 45° und 135° positive, reelle Eigenwerte existieren. Der zeitliche Verlauf der Eigenwerte für $\phi = \pi/4$ und $\phi = 3\pi/4$ unterscheidet sich jedoch wiederum nicht, sodaß die folgenden Auswertungen bezüglich des Winkelpaares $(0, \pi/4)$ erfolgen.

Bei der normierten Darstellung wiederum im Vergleich zu ε_{pv} und t_a zeigt sich wieder derselbe Effekt wie bei Zug- oder Druckbeanspruchung, dass die Sprünge in den Eigenwerten umso besser mit den Sprüngen in der plastischen Dehnung bzw. der aging time übereinstimmen, je kleiner der Betrag des Wellenvektors ist. Auch die kritische Dehnung wird bei kleinem Betrag des Wellenvektors gut durch den ersten peak der positiven, reellen Eigenwerte deutlich.

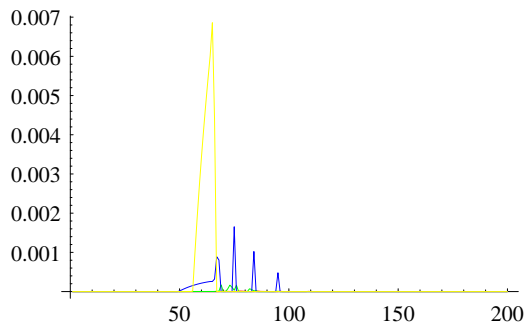
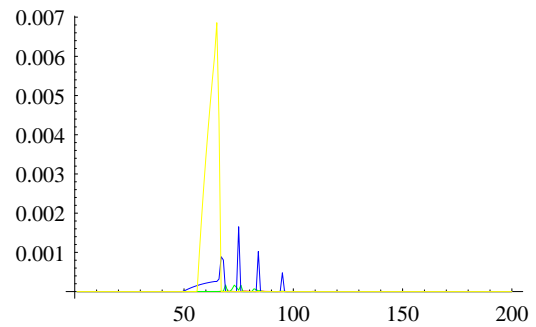
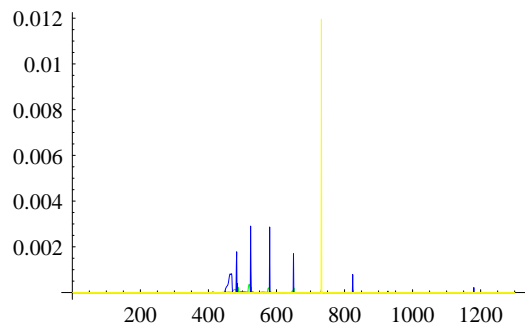
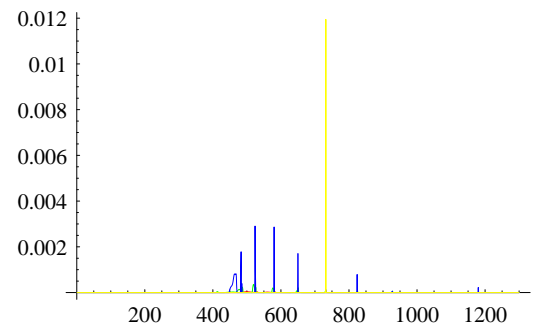
(a) $\dot{\sigma} = 1\text{MPa/s}$ (b) $\dot{\sigma} = 1\text{MPa/s}$ (c) $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ (d) $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$

Abbildung 5.12: Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ (oben) bzw. $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ (unten) mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.001$, grün: $k = 0.01$, blau: $k = 0.1$ gelb: $k = 1$), Vergleich zwischen Zug (rechts) und Druck (links)

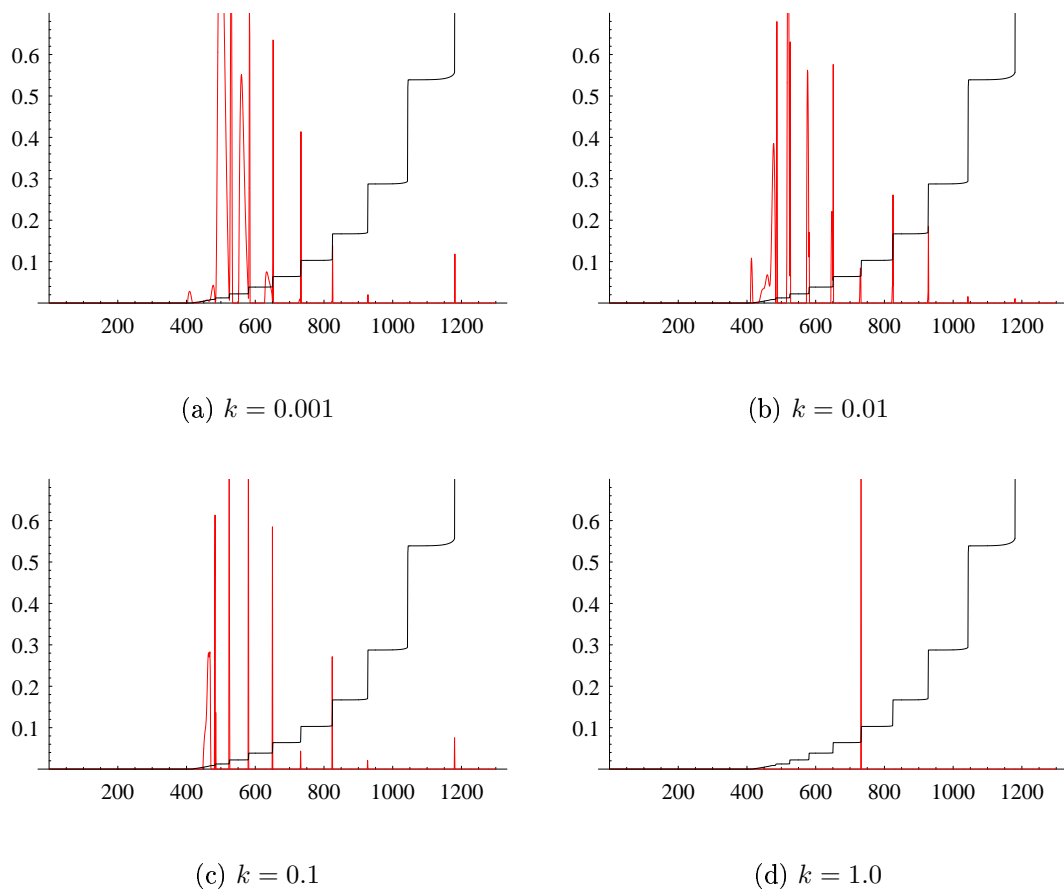


Abbildung 5.13: Maximaler Realteil der Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz ε_{pv})

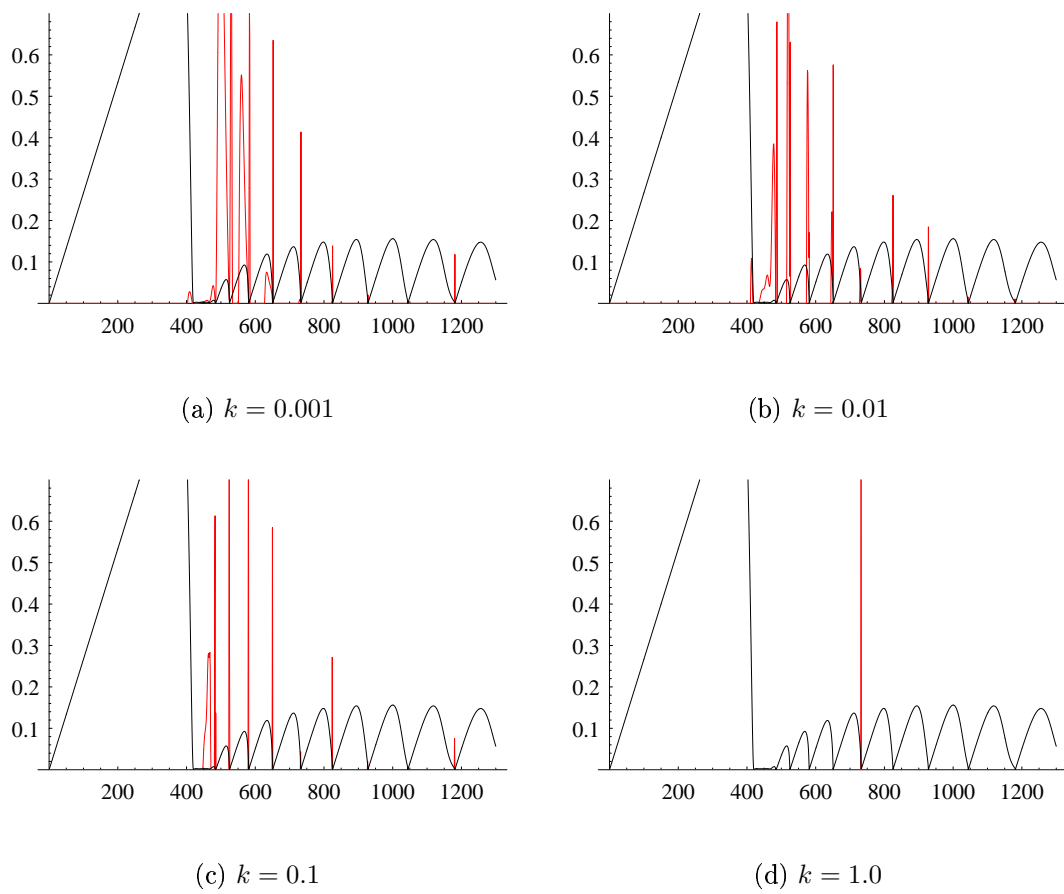


Abbildung 5.14: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a)

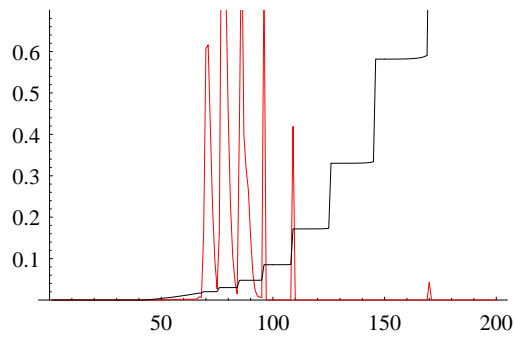
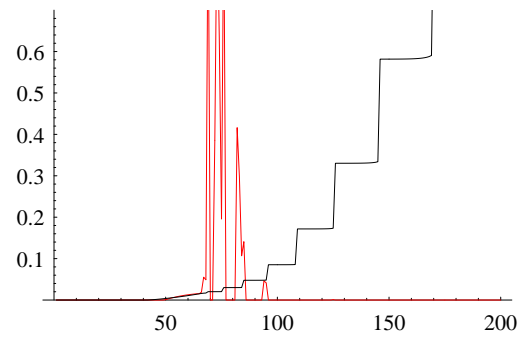
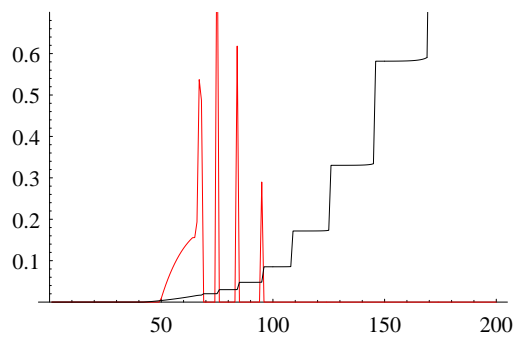
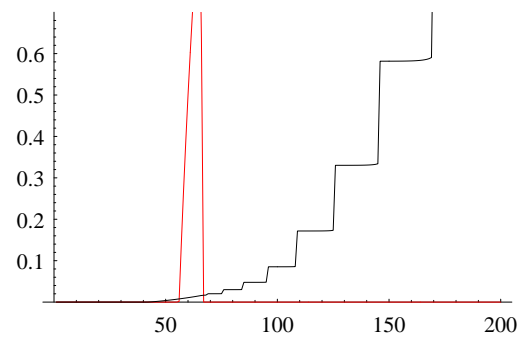
(a) $k = 0.001$ (b) $k = 0.01$ (c) $k = 0.1$ (d) $k = 1.0$

Abbildung 5.15: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz ε_{pv})

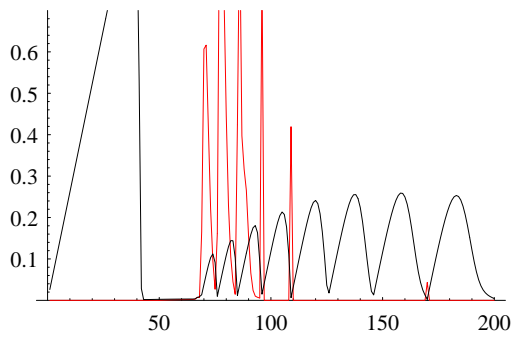
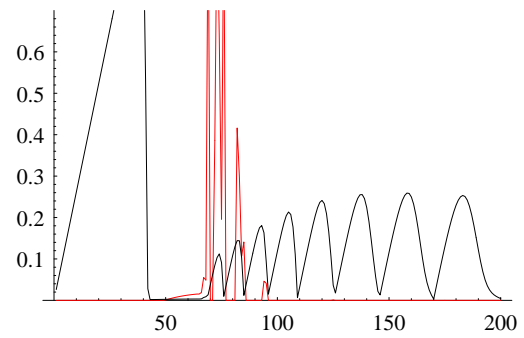
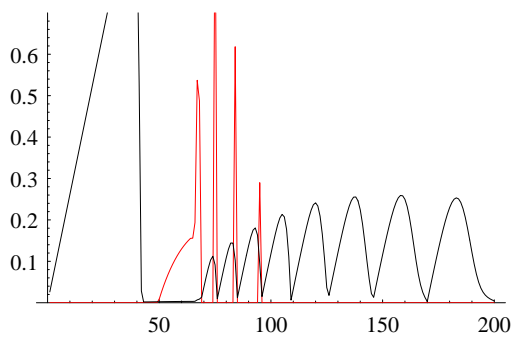
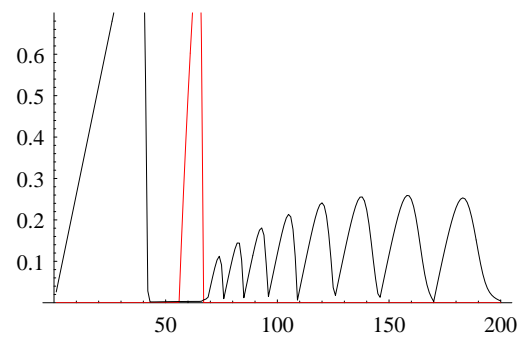
(a) $k = 0.001$ (b) $k = 0.01$ (c) $k = 0.1$ (d) $k = 1.0$

Abbildung 5.16: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a)

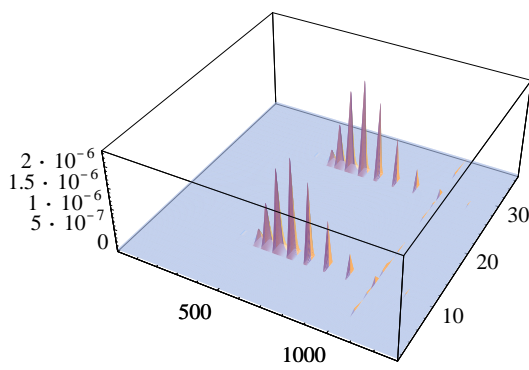
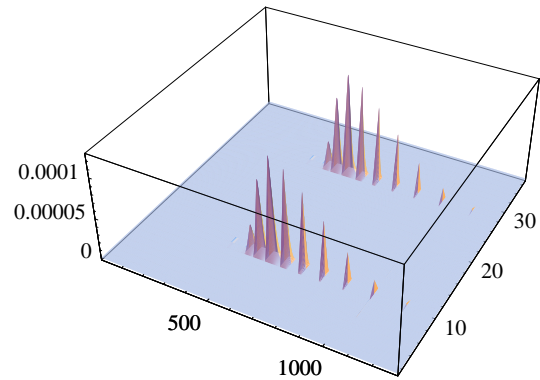
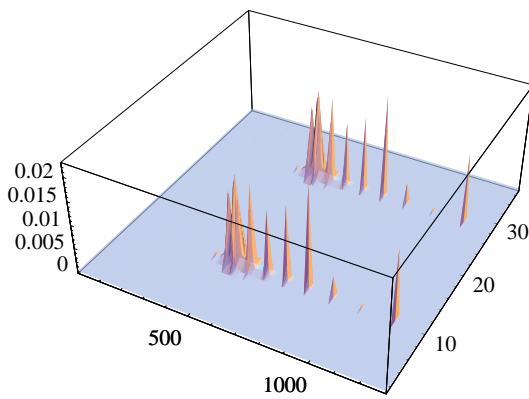
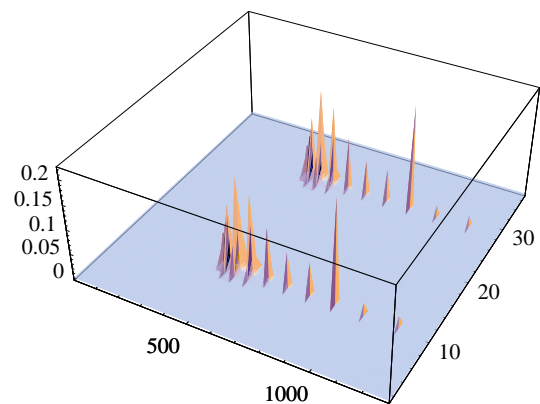
(a) $k = 0.001$ (b) $k = 0.01$ (c) $k = 0.1$ (d) $k = 1.0$

Abbildung 5.17: Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t und über ϑ dargestellt, für $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ (Für ϑ gilt die Teilung $\pi/36$)

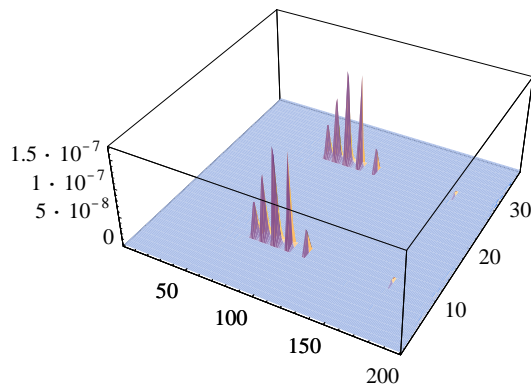
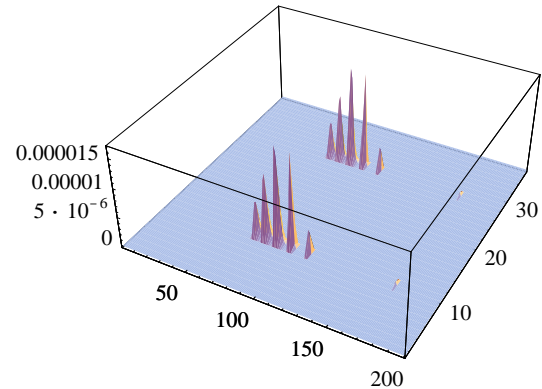
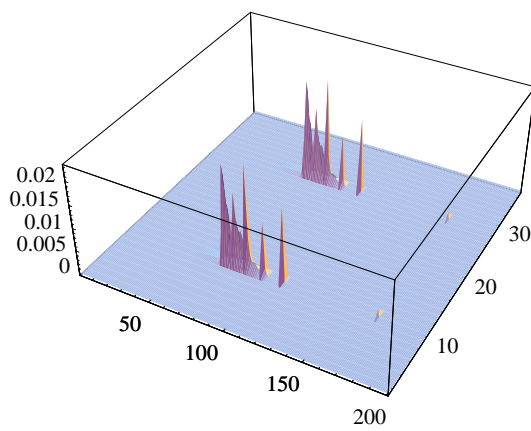
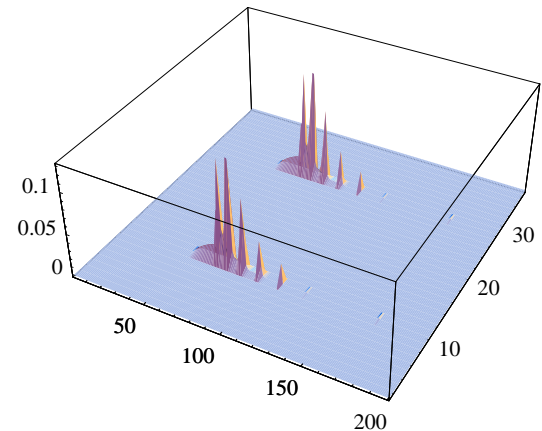
(a) $k = 0.001$ (b) $k = 0.01$ (c) $k = 0.1$ (d) $k = 1.0$

Abbildung 5.18: Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t und über ϑ dargestellt, für $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ (Für ϑ gilt die Teilung $\pi/36$)

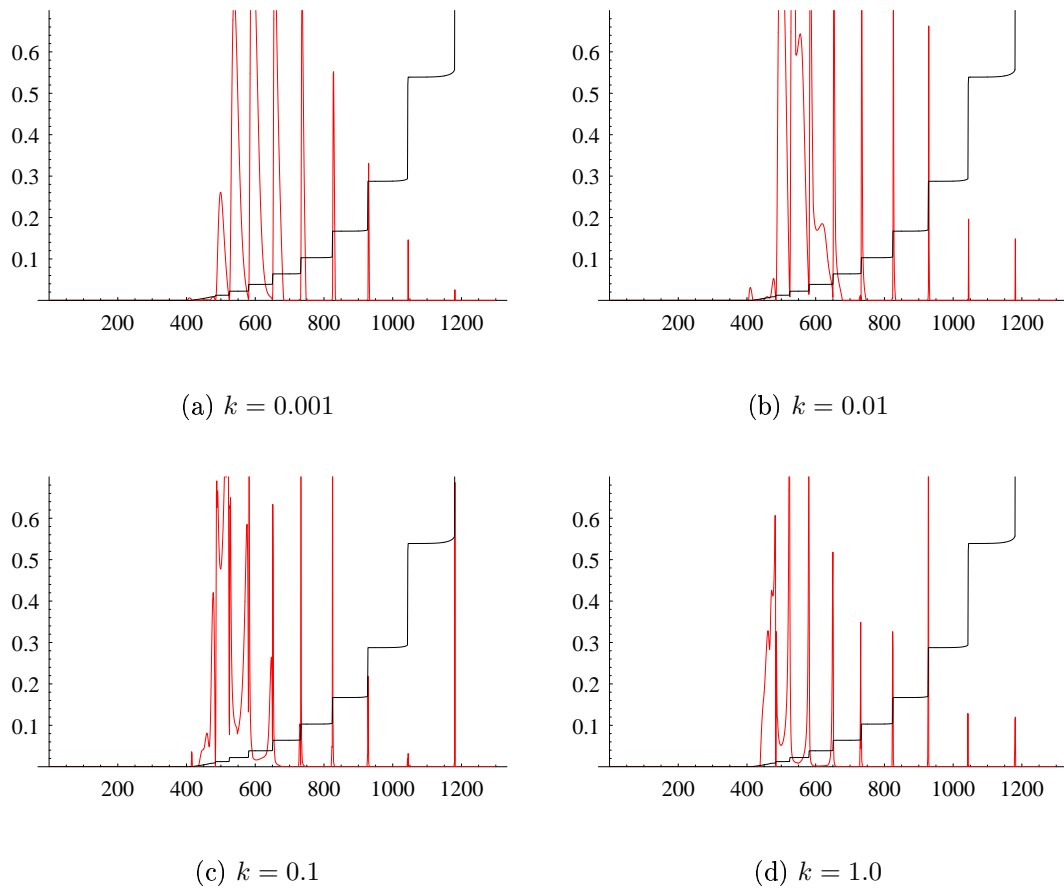


Abbildung 5.19: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a)

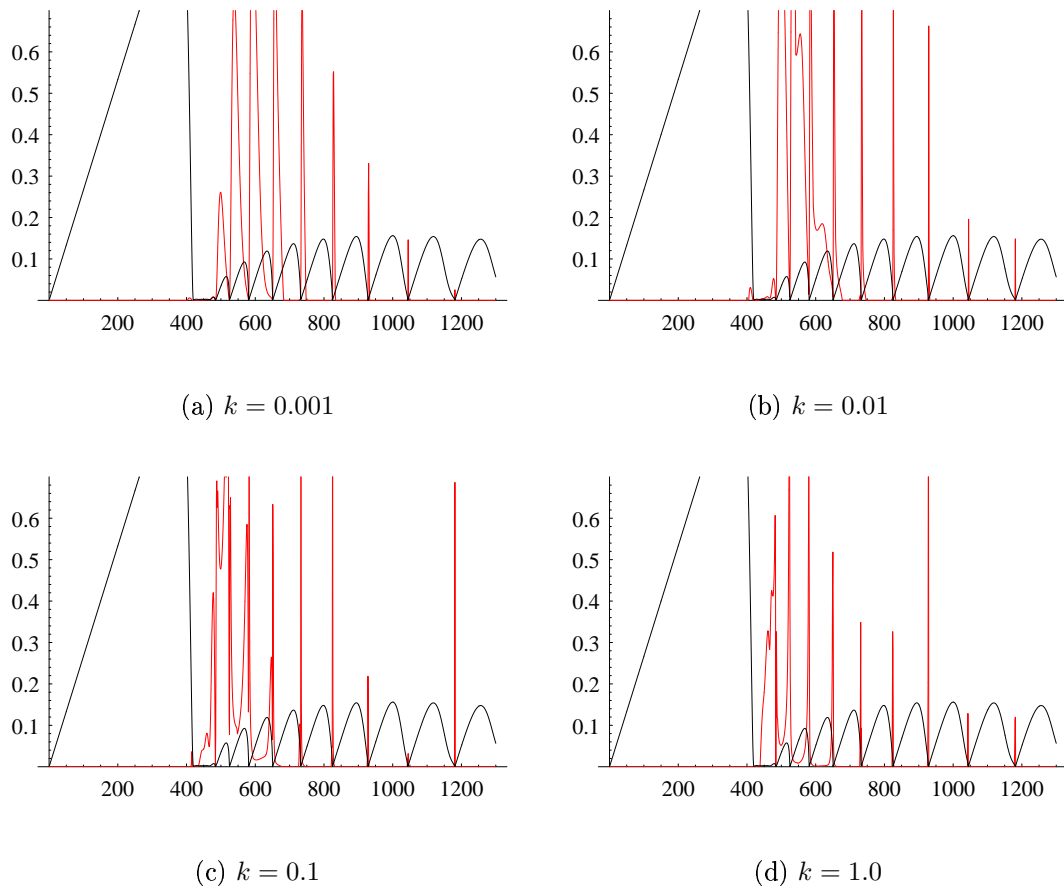


Abbildung 5.20: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a)

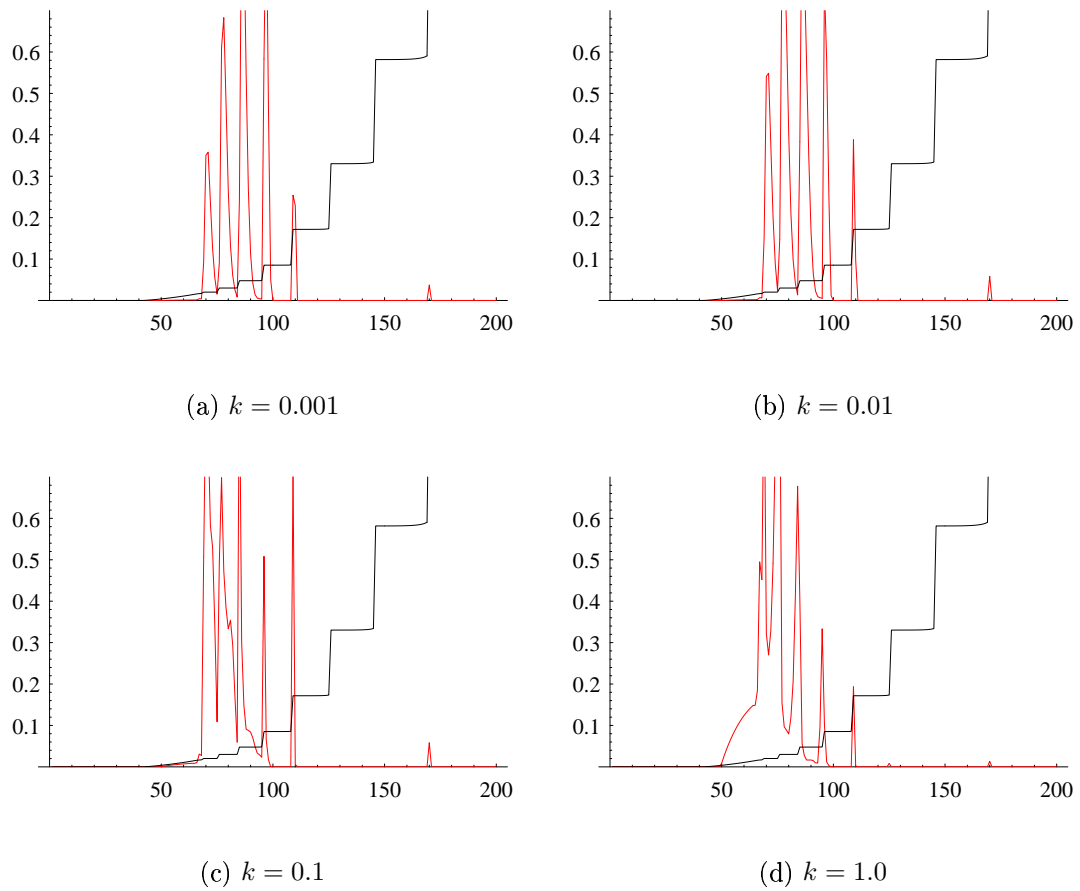


Abbildung 5.21: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a)

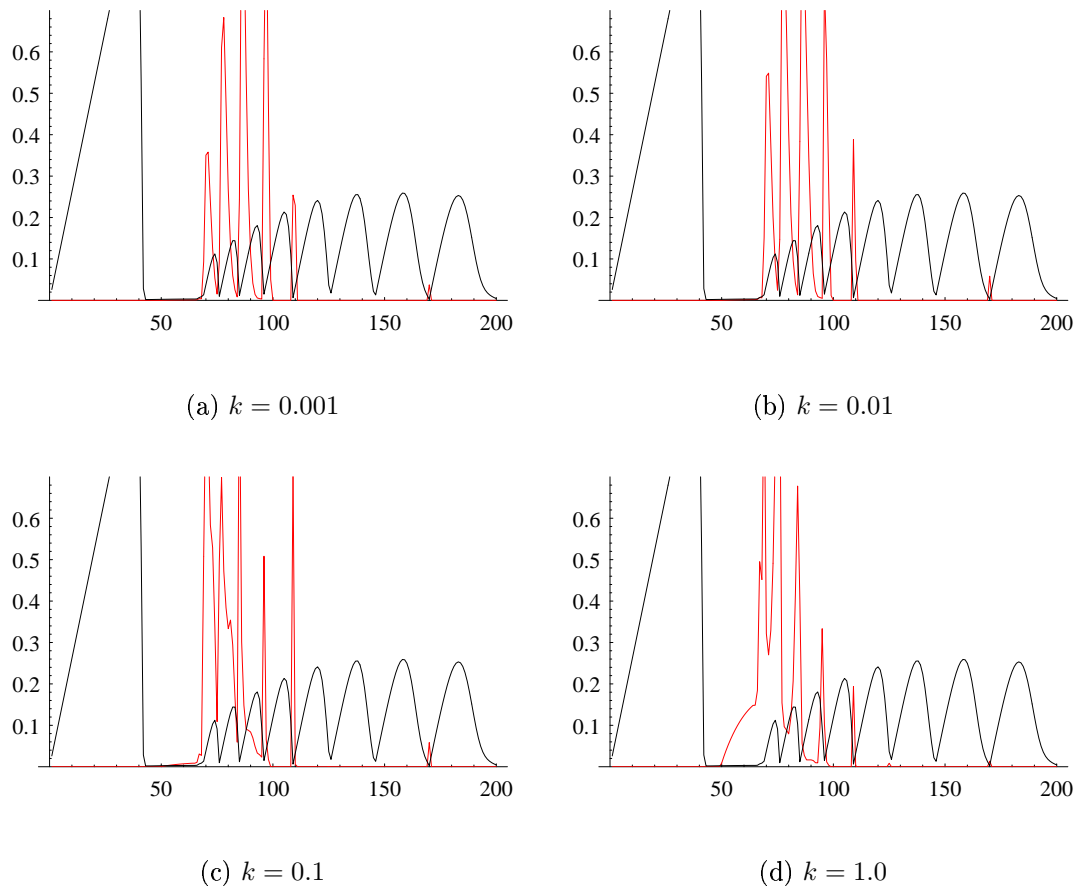


Abbildung 5.22: Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a)

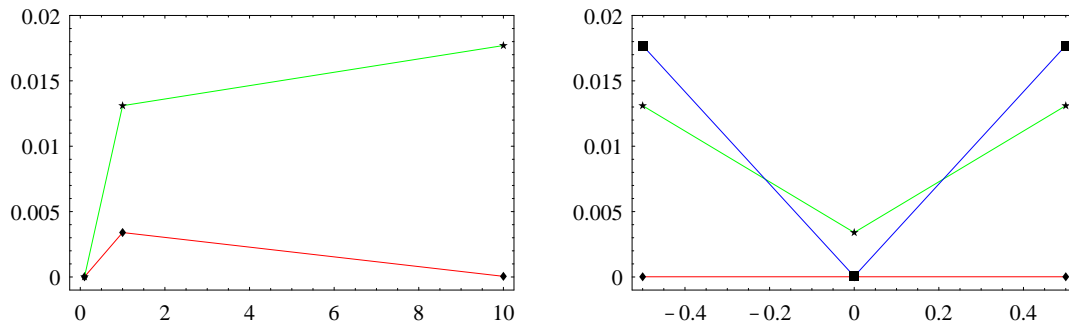


Abbildung 5.23: Rechts: kritische Dehnung über der Spannungsrates (grün- $\xi = \pm 0.5$, rot- $\xi = 0$), links: kritische Dehnung über ξ (rot- $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$, grün- $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$, blau- $\dot{\sigma} = 10\text{MPa/s}$)

5.3.4 Stabilitätskarten

Zum Ende dieser Arbeit soll auf die Erstellung von Stabilitätskarten eingegangen werden. Nutzt man die obigen Ergebnisse und detektiert für verschiedene Spannungsrates und Belastungsparameter ξ die kritische Dehnung indem man an dem Zeitpunkt des ersten positiven, reellen Eigenwertes die zugehörige plastische Dehnung ermittelt, so erhält man, wenn man die kritische Dehnung über der Spannungsrates bzw. über ξ aufträgt, die Abbildungen (5.23). Obwohl die Auflösung mit drei Spannungsrates und zwei ξ -Werten ($\xi = 0.5$ und $\xi = -0.5$ zeigten gleiches Verhalten) sehr gering ist, zeigt sich ein gewisser Trend. Bei $\xi = 0$ ist die kritische Dehnung unabhängig von der Spannungsrates sehr klein, hier tritt der PLC-Effekt schon nach geringen plastischen Dehnungen auf. Während bei einem Zug- bzw. Druckversuch, die kritische Dehnung weit höher liegt. In der rechten Abbildung zeigt sich nochmals die Symmetrie von Zug- und Druckversuch, beide haben völlig identische Eigenwertdarstellungen. Diese Form von Diagramm müsste nun noch durch Rechnungen detailliert werden. Weitere Spannungsgeschwindigkeiten und ξ müssten hinzugefügt werden, um aussagekräftiges Material zu Beurteilung von Umformprozessen zu erhalten.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit umfasst eine allgemeine Beschreibung des PLC-Effekts, sowie die Ausführungen zum ein- und dreidimensionalen Zhang-McCormick-Estrin Modell. Anschließend wird eine lineare Stabilitätsanalyse dieser Materialgleichungen durchgeführt, sowohl im ein- als auch im dreidimensionalen Fall. Darauf folgend werden die numerischen Ergebnisse der Stabilitätsanalyse diskutiert. Es zeigt sich, daß sich bei kleinen Wellenzahlen bzw. Beträgen der Wellenvektoren die besten Übereinstimmungen finden lassen, was die Sprünge in der Spannung und in den positiven und reellen Eigenwerten anbelangt. Auch die kritische Dehnung, bei der der PLC-Effekt auftritt, ließ sich mit kleinen Wellenzahlen gut durch den ersten positiven Eigenwert annähern. Diese Ergebnisse sind zu Stabilitätskarten zusammen gefasst worden, welche im nächsten Schritt verfeinert werden müßten. In diesen Stabilitätskarten wird deutlich, daß sich Zugbeanspruchung und Druckbeanspruchung im Hinblick auf die Stabilitätsanalyse nicht unterscheiden. Bei Walzbeanspruchung hingegen zeigen sich im Stabilitätsverhalten deutliche Unterschiede zur Zug-Druckbeanspruchung auf.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse, müssen zur weiteren Nutzung mit Stabilitätsanalysen von anisotropen Materialgesetzen vertieft werden, damit auch Eigenschaften des PLC-Effekts bei den besonders in der Industrie wichtigen Materialien mit kubischer Symmetrie erfasst werden. Außerdem muss im nächsten Schritt die Belastung die in dieser Arbeit auf proportionale Spannungsprozes-

se ausgelegt war verallgemeinert werden. Anschließend wird dann die eventuelle Anpassung der Materialmodelle erforderlich. Diese müssen dann zur numerischen Simulation in FE- Programme, wie zum Beispiel ABAQUS, implementiert werden. Damit können dann Stabilitätskarten bzw. Forming-Limit-Diagramms erstellt werden, welche dann generell über Beanspruchungsgrenzen Aufschluss geben können.

Literaturverzeichnis

- Benallal, A., 2000. Perturbation and stability of rate-dependent solids. *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, 61–77.
- Böhlke, T., 2000. Crystallographic Texture Evolution and Elastic Anisotropy: Simulation, Modeling, and Applications. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.
- Bross, S., Hähner, P., Steck, E., 2003. Mesoscopic simulations of dislocation motion in dynamic strain ageing alloys. *Computational Materials Science* 26, 46–55.
- Estrin, J., 1987. Stoffgesetze der plastischen Verformung und Instabilitäten des plastischen Fließens. *VDI Forschungsheft* 642, 1–48.
- Estrin, Y., Kubin, L., 1996. Spatial coupling and propagative plastic instabilities. In: *Continuum Models for Materials with Microstructure*. Mühlhaus, H.-B., p. 395.
- Franklin, S., Marder, M., 1995. Plastic deformation in solids: Theories of Portevin-Le Chatelier bands. *Plastic and Fracture Instabilities in Materials ASME* 200, 133–141.
- Franklin, S., Mertens, F., Marder, M., 2000. Portevin-Le Chatelier effect. *Physical Review E* 62 (6), 8195–8206.
- Kok, S., Beaudoin, A., Tortorelli, D., Lebyodkin, M., 2002. A finite element model for the Portevin-Le Chatelier effect based on polycrystal plasticity. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 10, 745–763.

- Kubin, L., Fressengeas, C., Ananthakrishna, G., 2002. Collective behaviour of dislocations in plasticity. In: Nabarro, F., Duesbery, M. (Eds.), *Dislocations in Solids*. missing, pp. 102–192.
- Lebyodkin, M., Brechet, Y., Estrin, Y., Kubin, L., 1996. Statistical behaviour and strain localization patterns in the portevin-le chatelier effect. *Acta mater.* 44, 4531–4541.
- Lebyodkin, M., Dunin-Barkowskii, L., Bréchet, Y., Estrin, Y., Kubin, L., 2000. Spatio-temporal dynamics of the portevin-le chatelier effect: experiment and modelling. *Acta mater.* 48, 2529–2541.
- Lebyodkin, M., Dunin-Barkowskii, L., Lebedkina, T., 2001. Statistical and multifractal analysis of collective dislocation processes in the Portevin-Le Chatelier effect. *Physical Mesomechanics* 4, 9–14.
- Penning, P., 1972. Mathematics of the Portevin-Le Chatelier Effekt. *Acta Metall.* 20, 1169–1175.
- Portevin, P., Le Chatelier, F., 1923. Sur un phénomène observé lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 176, 507–10.
- Zhang, S., McCormick, P., Estrin, Y., 2001. The morphology of Portevin-Le Chatelier bands: finite element simulation for Al-Mg-Si. *Acta. Mater.* 49, 1087–1094.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Gezackte bzw. gestufte Spannungsdehnungsdiagramme in Abhängigkeit der Versuchsbedingungen im Bereich des PLC-Effekts (Estrin, 1987)	5
2.2	Während der Beanspruchung laufen Verformungsbänder durch das Material (Franklin et al., 2000)	6
2.3	Schematische Darstellung der unterschiedlichen Kurvenformen Typ A, B und C im Spannungs-Dehnungsdiagramm bei dehnratengesteuerten Versuchen in Abhängigkeit der Dehnrate	7
2.4	Verschiedene Kurvenformen im Spannungs-Dehnungsdiagramm bei dehnratengesteuerten Versuchen in Abhängigkeit von der Dehnrate ($C(\dot{\epsilon} = 2.7 * 10^{-5} s^{-1})$, $B(\dot{\epsilon} = 1.1 * 10^{-4} s^{-1})$, $A(\dot{\epsilon} = 5.3 * 10^{-4} s^{-1})$) für AlMg bei Raumtemperatur (Lebyodkin et al., 2001)	8
2.5	Spannungs-Dehnungskurve und die dazugehörige statistische Auswertung der Spannungsabfallverteilung, sowie die Verteilung der Dauer der Spannungsabfälle (Kok et al., 2002)	9
2.6	Beispiel für die Auswertung der Korrelationsfunktion einer Zeitfunktion, welche den Versuchsdaten eines PLC behafteten Zugversuches entnommen wurde	10
2.7	Temperaturabhängigkeit des PLC-Effekts	11
2.8	Dehngeschwindigkeitsabhängigkeit des PLC-Effekts	12

2.9	Fließspannung als Funktion der Dehngeschwindigkeit bei verschiedenen Temperaturen im Bereich des Portevin-LeChatelier Effekts	13
2.10	Normales und inverses Verhalten der kritischen Dehnung	13
2.11	Interaktion zwischen Wald- und freien Versetzungen, sowie Fremdatomen (Bross et al., 2003)	14
2.12	Verlauf des für den PLC-Effekt verantwortlichen Teils der Fließspannung $F(\dot{\epsilon})$	14
5.1	Plastische Dehnung und aging time über der Zeit $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$	45
5.2	Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$)	46
5.3	Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), plastische Dehnung (schwarz) . . .	47
5.4	Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), aging time (schwarz)	48
5.5	Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$)	49
5.6	Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), Plastische Dehnung (schwarz) . .	50
5.7	Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), aging time (schwarz)	51
5.8	Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$)	52

5.9 Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.01$, gelb: $k = 0.5$, grün: $k = 1$, blau: $k = 100$) 53

5.10 Maximale Anfachung über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 10.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot), aging time (schwarz) 54

5.11 Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t und über ϑ dargestellt, $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ (oben) bzw. $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ (unten) (Für ϑ gilt die Teilung $\pi/36$) 57

5.12 Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ (oben) bzw. $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ (unten) mit verschiedenen Wellenzahlen (rot: $k = 0.001$, grün: $k = 0.01$, blau: $k = 0.1$ gelb: $k = 1$), Vergleich zwischen Zug (rechts) und Druck (links) 58

5.13 Maximaler Realteil der Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz ε_{pv}) 59

5.14 Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a) 60

5.15 Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz ε_{pv}) 61

5.16 Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a) 62

5.17 Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t und über ϑ dargestellt, für $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ (Für ϑ gilt die Teilung $\pi/36$) 63

5.18 Maximale Realteile der Eigenwerte über der Zeit t und über ϑ dargestellt, für $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ (Für ϑ gilt die Teilung $\pi/36$) 64

5.19 Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a) 65

5.20 Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a) 66

5.21 Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a) 67

5.22 Eigenwerte über der Zeit t bei $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$ mit verschiedenen Wellenzahlen (rot) (schwarz t_a) 68

5.23 Rechts: kritische Dehnung über der Spannungsrate (grün- $\xi = \pm 0.5$, rot- $\xi = 0$), links: kritische Dehnung über ξ (rot- $\dot{\sigma} = 0.1\text{MPa/s}$, grün- $\dot{\sigma} = 1.0\text{MPa/s}$, blau- $\dot{\sigma} = 10\text{MPa/s}$) 69

Tabellenverzeichnis

3.1	Anfangsbedingungen	22
3.2	Parameter für das McCormick Modell für eine Al-Mg-Si Legierungen	22
5.1	Kritische Dehnung in Abhängigkeit von der Spannungsrate	43